

Бой за 5-е место.

1. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD равна сторонам BC и AD . На стороне AD выбрана такая точка K , что $AB = BK$. Точка C_1 симметрична C относительно K , а точка D_1 симметрична D относительно A . Докажите, что $BC_1 = BD_1$.

2. Докажите, что для каждого натурального n найдется такое нечетное простое число p , что остаток от деления n на p равен $\frac{p-1}{2}$.

3. Расставьте на шахматной доске 8×8 несколько коней так, чтобы каждый бил ровно 4 других.

4. Натуральные числа a, b, c таковы, что $abc + 2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c = 97$. Чему может быть равно $a + b + c$?

5. Семья рыбаков — отец и 3 сына — хочет переправить боевую группу из 10 бойцов на Тайный остров архипелага в тылу врага. Есть двухместная лодка. Не запомнив дороги, без проводника ее не проплыть. Вначале дорогу до Тайного острова знает только рыбак-отец. Но всех проводить он не сможет: путь лежит мимо Сторожевой башни, и каждый из них может пройти мимо нее не более 5 раз (иначе поднимется тревога). Остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу. Рыбак запоминает дорогу, если проплыл по ней один раз, а бойцу для этого надо проплыть туда и обратно. В конце все рыбаки должны быть дома, все бойцы — на острове, лодка — где придется. Как организовать переправу?

6. Пусть $x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n$ — положительные вещественные числа. Докажите неравенство

$$x_0 + \frac{x_0}{(x_0 - x_1)^2} + \frac{x_1}{(x_1 - x_2)^2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_n)^2} \geq \frac{x_1}{(x_1 - x_0)^2} + \dots + \frac{x_n}{(x_n - x_{n-1})^2} + x_n + 2n.$$

7. На сторонах AC и BC треугольника ABC выбраны точки E и F соответственно такие, что $AE = AD$, $BF = BD$. Известно, что $\angle EDF = 40^\circ$. Найдите $\angle ECF$.

8. Для зарядки полностью разряженного телефона требуется 5 часов, а хватает заряженного телефона на 1 час разговоров. У Фомы два зарядных устройства. Каждый час в комнату вбегает Ерема и начинает звонить по одному из телефонов, пока тот полностью не разрядится. Сможет ли Фома полностью зарядить хотя бы один из пятидесяти разряженных телефонов, как бы не действовал Ерема?