XVIII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Гранд-лига. 1 тур. 20.09.2023.

1. Дан остроугольный треугольник ABC, в нем отмечен центр O описанной окружности, проведена высота AH_a и отмечен ортоцентр H. Точка P — одна из точек пересечения серединного перпендикуляра к HH_a и окружности с диаметром AO. Пусть B_1 и C_1 — проекции точки P на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что H лежит на прямой B_1C_1.

   (В. Конышев, модификация М. Дидина)

2. Все точки плоскости окрашены в два цвета. При этом для каждого положительного a существует равносторонний треугольник со стороной a, все вершины которого одного цвета. Докажите, что для любого треугольника существует равный ему треугольник, все вершины которого одного цвета.

3. На круговой дороге длины 2022 есть 2022 остановки, расположенных в вершинах правильного 2022-угольника. Остановки называют $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$ в некотором порядке. Автомобиль стартует в A_1 и едет от A_1 к A_2 по меньшей из двух дуг A_1A_2 (если обе дуги A_1A_2 равны, то по любой из них), затем от A_2 к A_3, и т.д., от A_{2021} к A_{2022}, и наконец от A_{2022} к A_1 (каждый раз по меньшей дуге). Найдите наибольшую возможную длину пути, которую мог проехать автомобиль?

4. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$. Докажите, что
$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k(2k-1)}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2}.$$

5. Пусть p — простое число, и пусть P — многочлен с вещественными коэффициентами степени меньше чем $p-1$ такой, что $|P(1)| = |P(2)| = \ldots = |P(p)|$. Докажите, что P — постоянный многочлен.

6. Даны натуральные числа a и $b \leq a$ такие, что НОК(a,b) + НОД(a,b) делится на $a+1$. Докажите, что b – квадрат натурального числа.

7. Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такие, что $f(f(a)-b)+bf(2a)$ — точный квадрат для любых целых a и b.

8. В алфавите 26 букв $A, \ldots, Z$. *Слово* — это конечная последовательность букв. Скажем, что слово s из N букв — *красивое*, если в нем каждая из 26 букв встречается хотя бы один раз, и любую перестановку букв $A, \ldots, Z$ можно получить из s путем вычеркивания $N-26$ букв, причем одним и тем же количеством способов. Докажите, что $N \geq 2022$.

9. Клетчатый квадрат 8×8 составлен из палочек длиной в сторону клетки. Какое наименьшее количество палочек нужно убрать, чтобы оставшиеся не образовывали ни одного прямоугольника?

10. В треугольнике ABC проведена нагелиана CN (т.е. N — точка касания стороны AB с вневписанной окружностью). К ω_1 и ω_2 — вписанным окружностям треугольников ACN и BCN — проведена общая внутренняя касательная l, отличная от CN. Пусть P и Q — точки касания l с ω_1 и CN с ω_2. Докажите, что A лежит на прямой PQ. (Л. Шатунов)