XVIII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Высшая. Первый тур. 20.09.2023.

1. Равносторонний треугольник разбит на три треугольника. Докажите, что хотя бы одну из этих трёх частей можно покрыть двумя другими.

2. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$. Докажите, что a и b — точные квадраты натуральных чисел.

3. Каждая точка плоскости окрашена в один из двух цветов. Для каждого равностороннего треугольника существует равный ему, все вершины которого одного цвета. Докажите, что для каждого треугольника существует равный ему треугольник, все вершины которого одного цвета.

4. Найдите все тройки действительных чисел x, y, z, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} x + y = z^4, \\ y + z = x^4, \\ z + x = y^4. \end{cases}$$

5. На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки E и F такие, что $EF = CM$, где M — середина AD. Оказалось, что ME — биссектриса угла AMC. Докажите, что MF — биссектриса угла CMD.

6. Натуральные числа m и n имеют разную чётность. Докажите, что $3m^2 + 5mn$ не делится на $3n^2 + mn$.

7. В Школе Рыцарей и Лжецов, в которой каждый ученик либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт, учатся k учеников ($k > 100$). Все они пронумерованы в журнале числами от 1 до k. Каждый из них сказал: «Число лжецов в нашей школе делится на мой номер». При каждом ли k по данным ответам можно однозначно определить, сколько в школе лжецов?

8. Клетчатая полоска $1 \times n$ составлена из палочек длиной в сторону клетки. Какое наименьшее количество палочек нужно убрать, чтобы оставшиеся не образовывали ни одного прямоугольника?

XVIII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Первая. Первый тур. 20.09.2023.

1. Равносторонний треугольник разбит на три треугольника. Докажите, что хотя бы одну из этих трёх частей можно покрыть двумя другими.

2. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$. Докажите, что a и b — точные квадраты натуральных чисел.

3. Известно, что $\mathbf{М \cdot А \cdot Т \cdot Е \cdot М \cdot А \cdot Т \cdot И \cdot К \cdot А = Э \cdot К \cdot О \cdot Н \cdot О \cdot М \cdot И \cdot К \cdot А}$. Чему равно произведение $\mathbf{М \cdot И \cdot С \cdot Т \cdot И \cdot К \cdot А}$?
(Разные буквы — это разные цифры, одинаковые буквы — одинаковые цифры.)

4. Найдите все тройки действительных чисел x, y, z, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} x + y = z^2, \\ y + z = x^2, \\ z + x = y^2. \end{cases}$$

5. На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки E и F такие, что $EF \perp CM$, где M — середина AD. Оказалось, что ME — биссектриса угла AMC. Докажите, что MF — биссектриса угла CMD.

6. На смену «Юный математик» приехали 120 школьников. У каждого хотя бы трое знакомых среди участников этой смены. Докажите, что для некоторого n, где $3 \le n \le 11$, можно устроить орлятский круг из n человек, в котором каждые два соседних школьника знакомы между собой.

7. В Школе Рыцарей и Лжецов, в которой каждый ученик либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт, учатся k учеников ($k > 20$). Все они пронумерованы в журнале числами от 1 до k. Каждый из них сказал: «Число лжецов в нашей школе делится на мой номер». При каждом ли k по данным ответам можно однозначно определить, сколько в школе лжецов?

8. Клетчатая полоска $1 \times n$ составлена из палочек длиной в сторону клетки. Какое наименьшее количество палочек нужно убрать, чтобы оставшиеся не образовывали ни одного прямоугольника?