Восемнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2023
Премьер-лига. Второй тур. 21.09.2023

1. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)}$$

при положительных вещественных x, y и z.

2. В остроугольном треугольнике ABC $(AB < AC)$ AH – высота, G – точка пересечения медиан, P и Q – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC соответственно. Точки M и N — середины отрезков PB и QC соответственно. Пусть D, E — точки на вписанной окружности ABC такие, что $\angle BDH + \angle ABC = 180°$, $\angle CEH + \angle ACB = 180°$. Докажите, что прямые MD,NE и HG имеют общую точку.

3. Даны простое $p > 2$ и натуральные числа a, b m, r такие, что ab не кратно p и $m^2 < ab$. Докажите, что существует не более одной пары простых чисел (x, y) таких, что $ax^2 + by^2 = mp^r$.

4. В остроугольном треугольнике ABC с ортоцентром H и описанной окружностью Ω касательная к описанной окружности треугольника BHC в точке H пересекает отрезки AB и AC в точках E и F соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника AEF. Докажите, что описанная окружность треугольника EOF касается Ω.

5. Пусть $a_k = \frac{2^{2^k} \cdot 2^{k+1}}{2^{2^k} + 3^{2^k}}$. Докажите, что $a_0 + a_1 + \ldots + a_{2023} < 4$.

6. Найдите все пары простых чисел (p, q) таких, что $p^3 + q^2 + 38$ делится на $6pq$.

7. Найдите количество перестановок $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, в которых для каждого натурального числа $k \leqslant n$ можно найти k стоящих подряд чисел с суммой $1 + 2 + \ldots + k$.

8. Всегда ли в плоском двудольном графе G можно выбрать по вершине в каждой грани так, чтобы все выбранные вершины были различны?