

XVIII Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 19–25.09.2023

Юниор-лига. 2 тур. 21.09.2023

1. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)}$$

при положительных вещественных x , y и z .

2. Найдите количество перестановок a_1, a_2, \dots, a_n чисел $1, 2, \dots, n$, в которых для каждого натурального числа $k \leq n$ можно найти k стоящих подряд чисел с суммой $1 + 2 + \dots + k$.

3. В круговом турнире по настольному теннису участвовали 2^n игроков (ничьих в настольном теннисе не бывает). Докажите, что можно выбрать $n + 1$ человека и раздать им футболки с номерами от 1 до $n + 1$ так, что в любой паре у выигравшего будет футболка с бОльшим номером.

4. Натуральное число называется свободным от квадратов, если оно не делится ни на один квадрат натурального числа кроме 1. Найдите все свободные от квадратов натуральные числа $n \geq 2$ такие, что сумма

$$\frac{1}{d_1} + \dots + \frac{1}{d_k}$$

является целым числом (d_1, d_2, \dots, d_k - все различные натуральные делители числа n).

5. Пусть $a_k = \frac{2^{2^k} \cdot 2^{k+1}}{2^{2^k} + 3^{2^k}}$. Докажите, что $a_0 + a_1 + \dots + a_{2023} < 4$.

6. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC выбрали точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, являющиеся точками касания с вневписанными окружностями. Затем отметили середины отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 , а всё остальное стёрли. С помощью циркуля и линейки по оставшимся трём точкам восстановите треугольник ABC .

7. Вневписанная окружность треугольника ABC с центром I_C касается стороны AB в точке C_0 , а продолжения стороны CA - в точке B_1 . Вневписанная окружность треугольника ABC с центром I_B касается стороны AC в точке B_0 , а продолжения стороны BA - в точке C_1 . Прямые $I_C B_1$ и $I_B C_1$ пересекаются в точке P . Докажите, что прямые AP и $C_0 B_0$ перпендикулярны.

8. Найдите все пары простых чисел (p, q) таких, что $p^3 + q^2 + 38$ делится на $6pq$.