Восемнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2023
Премьер-лига. Третий тур. 23.09.2023

1. Пусть $a, b, c, d \in [0, 1]$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+d} + \frac{1}{1+d+a} \leqslant \frac{4}{1+2\sqrt[4]{abcd}}.$$

2. Точка P лежит внутри треугольника ABC. Лучи AP, BP и CP пересекаются с противоположными сторонами треугольника ABC в точках A', B' и C' соответственно. Пусть P_A — середина отрезка, соединяющего центры вписанных окружностей треугольников BPC' и CPB'. Определим точки P_B и P_C аналогично. Докажите, что если $AB' + BC' + CA' = AC' + BA' + CB'$, то точки P, P_A, P_B и P_C лежат на одной окружности.

3. Последовательность задана условиями: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$ и $\frac{a_{n+3}}{a_{n+1}} + \frac{a_n}{a_{n+2}} = 2$ при всех натуральных n. Докажите, что число $\frac{2^{2021}}{a_{2023}}$ – целое.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки D, E и F — основания высот из вершин A, B и C соответственно. Луч EF пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Прямые BP и DF пересекаются в точке Q. Докажите, что если $ED = EP$, то CQ и DP параллельны.

5. Дано натуральное число n. Вначале имеется n кучек камешков, в каждой из которых изначально находится по одному камешку. Разрешается взять поровну камешков из любых двух куч и составить из этих камешков новую кучу. Для каждого n найдите наименьшее количество куч, которое может получиться после нескольких таких операций.

6. Последовательности натуральных чисел a_1, a_2, … и b_1, b_2, … удовлетворяют при всех n соотношению $b_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Может ли оказаться, что каждое натуральное число встречается в каждой из двух последовательностей ровно один раз?

7. Найдите все натуральные n, представимые в виде $n = \frac{4ab}{a-b}$ с натуральными a и b.

8. На плоскости дано 36 точек. Докажите, что среди них найдутся шесть точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, или шесть точек, лежащих на одной прямой.