XVIII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Высшая. Третий тур. 23.09.2023.

1. Никита записал по кругу 100 натуральных чисел (не обязательно различных). Костя записал по кругу эти же числа, но в другом порядке. Могло ли так оказаться, что у Никиты разность любых двух соседних чисел одна и та же, а у Кости все разности соседних чисел различны? (При нахождении разности двух чисел всегда из большего числа вычитаем меньшее.)

2. Назовем набор точек на плоскости *интересным*, если для любой раскраски точек в черный и белый цвета (допустимы раскраски, где все точки одного цвета) можно провести 2 прямые так, что они пересекают все черные точки и ни одной белой. Какое наибольшее количество точек может быть в интересном наборе?

3. Изначально на каждой стороне каждой клетки квадрата 8×8 написаны нули, а фишка стоит в одной из вершин клеток. За один ход можно либо фишкой пройти по стороне, на которой написано нечётное число, либо увеличить на 1 все числа на всех сторонах, выходящих из вершины с фишкой. Можно ли за конечное число ходов добиться такой расстановки чисел, чтобы после этого из каждой вершины можно было бы, уже не увеличивая числа, добраться до каждой вершины, проходя только по отрезкам с нечётными числами?

4. Рациональные числа x, y, z удовлетворяют равенству $x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x$. Барон Мюнхгаузен утверждает, что тогда $x = y = z$. Прав ли барон?

5. На столе лежат 2023 кучки камешков, в каждой из которых изначально находится по одному камешку. Можно выполнять ходы следующего вида: выбрать любые две кучки, взять из каждой кучки равное количество камешков и сформировать из них новую кучку. Найдите наименьшее число кучек, которые можно получить за конечное число ходов.

6. Докажите, что найдётся бесконечно много пар взаимно простых целых чисел a, b, больших 1, для которых $a^b + b^a$ делится на $a + b$.

7. В стране несколько городов, между любыми двумя либо нет дороги, либо есть одна дорога с односторонним движением. Оказалось, что для любых двух городов найдётся третий, из которого можно добраться до каждого из этих двух городов. Король хочет выбрать столицу так, чтобы из неё можно было попасть в любой другой город. Сможет ли он это гарантированно сделать?

8. Даны три отрезка a, b и c. Докажите, что существует равносторонний треугольник и точка внутри него, удаленная от вершин на расстояние a, b, c, тогда и только тогда, когда из данных отрезков можно составить треугольник, у которого наибольший угол меньше 120°.

XVIII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Первая. Третий тур. 23.09.2023.

1. На доске написаны все трехзначные числа, кратные 31. Можно ли выбрать из этих чисел десять так, чтобы каждая из цифр от 1 до 9 встречалась хотя бы один раз и в разрядах сотен, и в разрядах десятков, и в разрядах единиц?

2. На столе лежат 2023 кучки камешков, в каждой из которых изначально находится по одному камешку. Можно выполнять ходы следующего вида: выбрать любые две кучки, взять из каждой кучки равное количество камешков и сформировать из них новую кучку. Найдите наименьшее число кучек, которые можно получить за конечное число ходов.

3. Любой отрезок, длина которого больше 9 см, но меньше 11 см, будем называть *практически дециметровым*. Какую наибольшую длину может иметь отрезок, который нельзя разбить на практически дециметровые?

4. Никита записал по кругу 100 натуральных чисел (не обязательно различных). Костя записал по кругу эти же числа, но в другом порядке. Могло ли так оказаться, что у Никиты разность любых двух соседних чисел одна и та же, а у Кости все разности соседних чисел различны? (При нахождении разности двух чисел всегда из большего числа вычитаем меньшее.)

5. Имеет ли система уравнений хотя бы одно решение?

$$\begin{cases} \dfrac{\text{С}+\text{Е}+\text{М}+\text{Ь}}{\text{В}+\text{О}+\text{С}+\text{Е}+\text{М}+\text{Ь}} = \dfrac{7}{8} \\[2ex] \dfrac{\text{Д}+\text{Е}+\text{В}+\text{Я}+\text{Т}+\text{Ь}}{\text{Д}+\text{Е}+\text{С}+\text{Я}+\text{Т}+\text{Ь}} = \dfrac{9}{10} \end{cases}$$

(Одинаковые буквы — одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.)

6. Найти все пары целых чисел (a, b), для которых $a \leq b$ и

$$a^3 + b^3 - ab(a+b) = 2023.$$

7. Дан квадрат 99×99, разбитый на квадратики 1×1. Рассмотрим все вершины квадратиков, их 10000. Требуется отметить несколько из них так, чтобы на любом отрезке, соединяющем отмеченные вершины, было хотя бы 4 неотмеченных. Какое наибольшее количество вершин можно отметить?

8. На катете BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечена середина D, а на гипотенузе AB — такая точка E, что медиана AD перпендикулярна CE. Докажите, что $AE = 2EB$.