XVIII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Гранд-лига. 4 тур. Полуфинал. 24.09.2023.

1. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Точка S вне окружности $(ABCD)$ такова, что
$$\frac{AS+BS}{AB}=\frac{CS+DS}{CD}.$$
Докажите, что существует окружность, касающаяся прямых AB, CD и окружностей (ASB), (CSD). (И. Кухарчук, П. Ким)

2. Рассмотрим все 100-значные (в десятичной системе, ведущие нули разрешены) числа. Их требуется разбить на 10 множеств так, чтобы любые два числа из одного множества имели одинаковую цифру в каком-то из разрядов. Сколько есть таких разбиений?

3. Связный граф на n вершинах таков, что при выкидывании любых двух ребер, имеющих общий конец, связность графа нарушается. Найдите максимальное число рёбер в этом графе.

   (В. Дольников)

4. Пусть $\sigma_m(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ обозначает сумму всевозможных произведений из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, взятых в количестве m. Многочлен $P = P(x_1, \ldots x_n)$ от $n = 2023$ переменных таков, что для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких, что $\sigma_{18}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, и любой перестановки τ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ выполнено равенство $P(a_{\tau(1)}, \ldots, a_{\tau(n)}) = P(a_1, \ldots, a_n)$. Докажите, что $P = S + \sigma_{18}R$, где S и R — многочлены от n переменных, причем S — симметрический многочлен. (Г. Челноков)

5. Назовем последовательность целых чисел *хорошей*, если каждое целое число появляется в ней ровно один раз. Найдите все непостоянные многочлены с целыми коэффициентами $P(x)$, такие, что для любой хорошей последовательности $\{a_i\}$ существуют натуральные числа k и $i < j$ такие, что $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j = P(k)$.

6. Найдите все функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

   (i) $f(mn) = f(m)f(n)$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$;

   (ii) $f(m) + f(n)$ делится на $m + n$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$.

7. Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность Ω. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, BL — биссектриса этого же треугольника. На окружности (AIC) взята произвольная точка P. Окружность (BPD) пересекает биссектрису угла ADC в точке $Q \neq D$. Докажите, что углы $\angle APL$ и $\angle QPC$ равны или в сумме дают 180 градусов.

   (И. Кухарчук)

8. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство:
$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b+c}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a+c}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{a+b}}\geqslant\frac{3(a+b+c)}{a+b+c+1}.$$
   (И. Иванов-Погодаев)

9. Пусть $0,a_1a_2a_3\ldots$ — десятичная запись положительного рационального числа a. Для каких a выполнено условие: для любого натурального n из последовательности цифр $a_1a_2a_3\ldots$ можно вырезать (как подслово) натуральное число, делящееся на 2^n? (П. Кожевников)

10. Для n различных точек плоскости на доске выписали все расстояния между парами этих точек, а на листке выписали числа $\lfloor \log_2 d \rfloor$, для всех чисел d, выписанных на доске. Докажите, что числа на листке принимают менее $2n$ различных значений.