XVIII Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 19–25.09.2023

Юниор-лига. Бои за 5–8 места. 24.09.2023

1. Есть 101 красная карточка с числами от 1 до 101 (по одному разу) и 101 синяя карточка с числами от 1 до 101 (по одному разу). Петя хочет выбрать несколько карточек так, чтобы:
1) синих карточек было выбрано ровно 51,
2) была выбрана хотя бы одна красная карточка,
3) число на наибольшей выбранной красной карточке было равно числу на наименьшей выбранной синей карточке.
Сколько существует способов это сделать?

2. Найдите количество перестановок чисел $\{1, 2, ..., n\}$ вида $\{a_1, ..., a_n\}$ таких, что для каждого $1 \leq i \leq n$ число $2i$ делится на a_i.

3. Сумма n вещественных чисел равна 0. Каждые два из этих чисел, которые отличаются хотя бы на 1, перемножили. Докажите, что сумма получившихся произведений (если они есть) отрицательна.

4. Пусть ABC — остроугольный треугольник, $AB < AC$, а D, E, F — точки касания вписанной окружности ω со сторонами BC, AC, AB соответственно. Пусть M, N лежит на EF так, что $MB \perp BC$ и $NC \perp BC$. MD и ND пересекают окружность ω в точках D и Q соответственно. Докажите, что $DP = DQ$.

5. Найдите все упорядоченные пары натуральных чисел $(x,\, y)$, такие что

$$\frac{(x+y)(xy-1)}{xy+1} = p,$$

где p — некоторое простое число.

6. Внутри треугольника ABC проведена высота AH. В треугольники ABH и ACH вписаны окружности с центрами I и J. Оказалось, что $AI = AJ$. Можно ли утверждать, что треугольник ABC равнобедренный?

7. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z), удовлетворяющие уравнению

$$2(x+y+z+2xyz)^2 = (2xy+2yz+2zx+1)^2 + 2023.$$

8. Докажите, что в таблице $n \times n$ можно расставить все числа 1, 2, $\ldots$, n^2 по одному разу так, чтобы суммы чисел во всех доминошках были различны.