Пятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 21-28.09.2010

Третий тур. Премьер-лига. 25 сентября 2010 г.

1. В стране 100 городов, соединенных 100 дорогами (два города может соединять только одна дорога). Всегда ли можно выбрать 50 городов так, чтобы каждая дорога начиналась или заканчивалась в одном из них?

2. Вещественные числа a, b, c, d удовлетворяют системе уравнений $abc - d = 1$, $bcd - a = 2$, $cda - b = 3$, $dab - c = -6$. Докажите, что $a + b + c + d \neq 0$.

3. Найдите все натуральные n такие, что $n \cdot 2^{n+1} + 1$ – точный квадрат.

4. У брата келаря есть 100 одинаковых свечей, которые сгорают равномерно. Он хочет зажечь в первый день одну свечу ровно на час, во второй день – две свечи ровно на час, в третий день – три свечи ровно на час, ..., в сотый день – все сто свечей ровно на час так, чтобы в результате все свечи сгорели целиком. Удастся ли ему это?

5. Двадцать пять "орлят" попарно различного роста нужно выстроить в прямоугольник 5×5 так, чтобы в каждой колонне люди стояли в порядке убывания роста. Сколькими способами это можно сделать?

6. Докажите, что сумму квадратов трёх попарно различных нечетных чисел можно представить в виде суммы квадратов шести натуральных чисел (не обязательно различных).

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. На прямой B_1C_1 выбрана точка K так, что $\angle KBA = 90°$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1BK лежит на прямой AC.

8. В параллелограмме $ABCD$ точка E – середина отрезка AB, а F – середина отрезка BC. Отрезки EC и FD пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника CDP, если площадь треугольника ABP равна 1.

Пятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 21-28.09.2010

Третий тур. Премьер-лига. 25 сентября 2010 г.

1. В стране 100 городов, соединенных 100 дорогами (два города может соединять только одна дорога). Всегда ли можно выбрать 50 городов так, чтобы каждая дорога начиналась или заканчивалась в одном из них?

2. Вещественные числа a, b, c, d удовлетворяют системе уравнений $abc - d = 1$, $bcd - a = 2$, $cda - b = 3$, $dab - c = -6$. Докажите, что $a + b + c + d \neq 0$.

3. Найдите все натуральные n такие, что $n \cdot 2^{n+1} + 1$ – точный квадрат.

4. У брата келаря есть 100 одинаковых свечей, которые сгорают равномерно. Он хочет зажечь в первый день одну свечу ровно на час, во второй день – две свечи ровно на час, в третий день – три свечи ровно на час, ..., в сотый день – все сто свечей ровно на час так, чтобы в результате все свечи сгорели целиком. Удастся ли ему это?

5. Двадцать пять "орлят" попарно различного роста нужно выстроить в прямоугольник 5×5 так, чтобы в каждой колонне люди стояли в порядке убывания роста. Сколькими способами это можно сделать?

6. Докажите, что сумму квадратов трёх попарно различных нечетных чисел можно представить в виде суммы квадратов шести натуральных чисел (не обязательно различных).

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. На прямой B_1C_1 выбрана точка K так, что $\angle KBA = 90°$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1BK лежит на прямой AC.

8. В параллелограмме $ABCD$ точка E – середина отрезка AB, а F – середина отрезка BC. Отрезки EC и FD пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника CDP, если площадь треугольника ABP равна 1.