Девятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 20-27.09.2014

Второй тур. Премьер-лига. 22 сентября 2014 г.

1. Многочлен $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$ с положительными коэффициентами имеет n действительных корней. Докажите, что

$$p(1)p(2)p(3)\ldots p(n) \geqslant (n+1)!^n.$$

2. Внутри выпуклого многоугольника единичной площади выбрана точка A. Верно ли, что всегда можно выбрать точки B и C на сторонах многоугольника таким образом, чтобы площадь треугольника ABC была больше $\frac{1}{6}$?

3. BE и CF – высоты остроугольного треугольника ABC с $\angle A = 60^\circ$, пересекающиеся в точке H. На отрезках BH и HF выбраны точки M и N соответственно таким образом, что $BM = CN$. Чему может равняться величина $\frac{OM}{MN}$, где O – центр описанной окружности ABC?

4. Докажите, что для любого натурального числа n существуют попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что $a_n! = a_{n-1}!\,a_{n-2}!\ldots a_1!$.

5. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + \sin x = y, \\ y + \sin y = x. \end{cases}$$

6. Точка I – центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, точка H – его ортоцентр, точка K – ортоцентр треугольника BIC, точка T – центр описанной окружности треугольника BKC. Докажите, что $TH \perp AI$.

7. По кругу стоят 100 коробок, в одной лежит 777 камней, остальные – пустые. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход можно переложить один или несколько камней (но не все) из любой коробки в соседнюю, если эта соседняя пуста. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

8. Можно ли квадрат 99×99 разрезать (по клеткам) на несколько прямоугольников периметра 22?