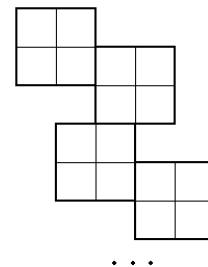


XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VIII Турнир математических игр.
1-я игра. «Домино». Младшая лига (7-9 классы). Решения. 16 сентября 2015 года

- 0–0.** Сколько существует раскрасок доски 8×8 таких, что при перестановке строк местами и столбцов местами можно получить доску с шахматной раскраской? ($C_8^4 \cdot C_7^4 = 70 \cdot 35 = 2450$. Каждая раскраска определяется раскраской клеток в левом столбце - C_8^4 вариантов, а затем уже в нижней строке - C_7^4 .)
- 0–1.** Найдите наибольшее натуральное число из 10 различных цифр такое, что у любой пары соседних цифр НОД (наибольший общий делитель) равен 1. (9876543210)
- 0–2.** Найдите все простые числа, которые являются одновременно суммой двух простых чисел и разностью двух простых чисел. (5. Данное простое число $p \geq 4$ как сумма двух простых чисел, значит, оно нечётное, тогда и в сумме, и в разности обязательно участвует единственное чётное простое число 2, т.е. $p = q + 2 = r - 2$, где q и r – простые числа. Значит, числа $q = p - 2$, p , $r = p + 2$ – три подряд идущих простых нечётных числа, одно из которых заведомо делится на 3, т.е. равно 3. Это могут быть только числа 3, 5, 7, тогда $p = 5$.)
- 0–3.** Число 1 – корень уравнения $(x+a)^2 + (x+b)^2 + (x+c)^2 = 0$. Найдите сумму $a+b+c$. (-3. Заметим, что равенство возможно только в случае $x+a=x+b=x+c=0$, значит, если 1 – корень уравнения, то $a=b=c=-1$ и их сумма равна (-3).)
- 0–4.** Найдите наименьшее значение суммы $|x| + |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4|$. (6. Это выражение равно сумме расстояний на числовой прямой от точки x до точек 0, -1, -2, -3, -4. При $x=-2$ эта сумма равна 6, а при удалении от точки (-2) эта сумма будет увеличиваться.)
- 0–5.** Какое наименьшее количество точек на плоскости надо взять, чтобы среди попарных расстояний между ними встретились числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64? (8 точек A_1, A_2, \dots, A_8 , расположенных на расстояниях $A_1A_2=1, A_2A_3=2, \dots, A_7A_8=64$, удовлетворяют условию. Покажем, что меньшего числа точек на плоскости расположить нельзя. Для каждого $k=0, 1, \dots, 6$ выберем пару точек, между которыми расстояние равно 2^k , и соединим их отрезками. Из неравенства треугольника следует, что полученные 7 отрезков (и никакая часть из них) не образуют замкнутого многоугольника, т.к. самый длинный из любого набора выбранных отрезков длиннее суммы остальных выбранных отрезков. Следовательно, число точек должно по крайней мере на 1 превосходить число этих отрезков, т.е. быть не меньше $7+1=8$.)
- 0–6.** Сложили все натуральные числа, меньшие 1000, сумма цифр каждого из которых равна N . Найдите все N , при которых сумма таких чисел делится на N ? ($1 \leq N \leq 27$. Числа разбиваются на тройки, в сумме кратные N , $abc + bca + cab = (a+b+c) \cdot 111$. Случаи равных цифр и $N:3$ рассматриваем отдельно.)
- 1–1.** Чему равна сумма всех целых делителей числа 2015? (0, т.к. все делители разбиваются на пары противоположных по знаку)
- 1–2.** Приведите пример набора, состоящего из 4 различных чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. (например, 1, 2, -1, -2)
- 1–3.** Электронные часы показывают время от 00.00.00 до 23.59.59. Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно три цифры 7? (72 секунды. Три семёрки могут гореть только в комбинации $x7.y7.z7$. А таких комбинаций в течение суток $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$.)
- 1–4.** Решите систему уравнений
$$\begin{cases} xy + yz = 2 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \cdot (x=y=z=\pm 1. \text{ Вычтем из первого уравнения удвоенное второе, тогда } (x-y)^2 + (y-z)^2 = 0, \text{ откуда все числа равны между собой. Тогда из любого уравнения и получим нужные ответы.})$$
- 1–5.** Сколько в третьем тысячелетии годов, записываемых только чётными цифрами? ($124=5^3-1$. Всего существует $1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ четырёхзначных чисел, начинающихся на 2, все цифры которых чётны, но число 2000 не даёт год третьего тысячелетия.)
- 1–6.** В числе 9876543210 зачёркиваются цифры (от 1 до 9 штук) так, чтобы оставшееся число делилось на 10. Сколько таких различных чисел можно получить? (511 чисел. Каждая ненулевая цифра либо зачёркнута, либо нет, значит, всего 2^9 вариантов, но один вариант – ничего не зачеркнуть – нами не должен учитываться.)

2–2. На клетчатом листе по линиям сетки нарисован многоугольник, который можно разрезать на 30 квадратиков 2×2 . Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно из него гарантированно вырезать? Приведите ответ и пример. (30. Из каждого квадрата всегда можно вырезать уголок, но существует контр-пример (см. рис.), когда нельзя вырезать более 30 уголков, что показывается перебором.)

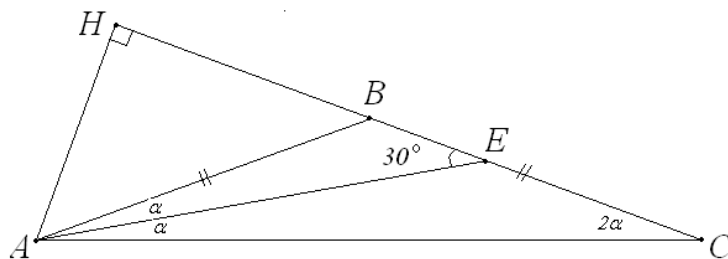


2–3. Решите уравнение $\sigma(2n) = 3\sigma(n)$ в натуральных числах, где $\sigma(n)$ – сумма всех натуральных делителей натурального числа n . (Все нечётные натуральные n . Воспользуемся формулой суммы всех натуральных делителей

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{\alpha_k}),$$

где используется разложение на простые множители числа $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Заметим, что при нечётном n у числа $2n$ добавится дополнительный множитель $(1+2)=3$, который и даст нам выполнение требуемого равенства. При чётном n самая первая скобка увеличится ровно на одно слагаемое – следующую степень двойки, а сам этот множитель увеличится менее чем в 3 раза, значит, $\sigma(2n) < 3\sigma(n)$.)

2–4. Найдите углы равнобедренного треугольника, в котором биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, отличаются по длине в два раза. (20°, 20°, 140°. Пусть AH – высота, AE – биссектриса, тогда в прямоугольном треугольнике AHE гипотенуза AE вдвое длиннее катета AH , значит, $\angle AEH = 30^\circ$,



а $\angle HAE = 60^\circ$. Это возможно только в случае, если высота AH расположена вне треугольника. Тогда $30^\circ = \angle EAC + \angle ECA = 3\alpha$, где $2\alpha = 20^\circ$ – угол при основании данного равнобедренного треугольника.)

2–5. Все стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равны 1, а $\angle BCD = 2\angle ACE$. Найдите радиус описанной около треугольника ACE окружности. (1. Отобразим треугольники ABC и CDE относительно AC и CE , тогда точки B и D отобразятся в одну и ту же точку K , т.к. сумма углов ACB и ECD равна углу ACE , а отрезки BC и CD равны. В результате получим равносторонний треугольник AEK , а точка K окажется центром описанной около треугольника ACE окружности, значит, радиус окружности равен 1.)

2–6. При каких значениях a неравенство $\frac{(x-2)^2(x+a)}{x-7} \leq 0$ имеет единственное решение? ($a = -7$. Очевидно, что $x=2$ является решением при любом a , поэтому условие задачи будет выполнено только в том случае, если неравенство $\frac{x+a}{x-7} \leq 0$ либо не будет иметь решений, либо его решением снова будет $x=2$. Методом интервалов, рассмотрев разные случаи для a относительно -7 найдём, что это выполняется только при $a=-7$.)

3–3. Каждая клетка доски 8×8 окрашена в какой-то цвет, при этом в любой строке и любом столбце есть клетки ровно двух цветов. Какое наибольшее количество различных цветов может быть использовано? Приведите пример и ответ. (9 цветов, например, поставим 8 клеток разного цвета по главной диагонали, а остальные клетки покрасим в 9-ый цвет. Предположим, что можно взять не менее 10 цветов. Т.к. в первой строке ровно 2 цвета, то остальные (не менее 8) цвета должны оказаться в оставшейся доске 7×8 . Значит, по принципу Дирихле из 7 строк найдётся строка (с точностью до симметрии можно считать, что вторая), в которой 2 новых цвета, отличных от цветов первой строки. Но тогда в каждом столбце стоят только клетки цветов из первой и второй строки, т.к. это будут два разных цвета. Значит, на доске окажется ровно 4 цвета. Противоречие, значит, всего не более 9 цветов.)

3–4. В некоторых клетках доски 5×9 находятся фишки. За одну операцию каждая фишка перемещается в соседнюю по стороне клетку по следующему правилу: первый ход каждая фишка делает в произвольном направлении, а если предыдущий её ход был горизонтальным, то следующий ход должен быть вертикальным и наоборот. При

1	2	1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1

каком наибольшем количестве фишек существуют расстановка и такой порядок операций, когда после каждой операции на каждой клетке будет стоять не более одной фишки? (**32**, расставим фишки в прямоугольнике 4×8 , разобьём его на квадраты 2×2 и в каждом квадрате фишки ходят по часовой стрелке. Если фишек будет больше 32, то применим раскраску доски квадратами 2×2 в четыре цвета. Заметим, что каждая фишка при своих ходах циклически за 4 операции повторяет все цвета в некотором порядке. Тогда по принципу Дирихле найдётся одна из первых четырёх операций, когда на 8 клетках цвета 3 окажутся не менее 9 фишек, значит, будет клетка хотя бы с двумя стоящими на ней фишками.)

3–5. Какое наибольшее количество прямых можно расположить на плоскости таким образом, чтобы среди любых 10 из них нашлись две прямые, образующие угол 60° ? (**27**. *Пример.* Проведем через одну точку три прямые, делящие полный угол на шесть углов по 60° , затем добавим к каждой 8 параллельных ей прямых. *Доказательство оценки.* Предположим, что у нас не менее 28 прямых. Разобьём их на несколько семейств по следующему принципу: две прямые принадлежат одному семейству, если они параллельны или угол между ними равен 60° . Каждое семейство состоит из трёх наборов параллельных прямых. По принципу Дирихле, один из этих наборов содержит не меньше трети всех прямых этого семейства. Выбрав из каждого семейства по такому набору, мы получим набор из прямых, содержащий не менее трети из 28 прямых, то есть не менее 10 прямых, и угол между любыми двумя из них не равен 60° . Противоречие.)

3–6. Сколькими способами число 36 можно представить в виде суммы не менее чем трёх натуральных слагаемых? (*Порядок слагаемых важен, т.е., например, $2+20+1+13$ отличается от $13+2+1+20$.)* (**2³⁵–36**. Заметим, что если выписать в ряд 36 единиц, то каждый способ составления суммы соответствует способу расставить в некоторых промежутках между единицами знака «+», когда количество единиц между соседними плюсами и даст соответствующее слагаемое в сумму. Всего таких способов 2^{35} , но один из посчитанных нами способов соответствует сумме, в которой ровно одно слагаемое 36 (это когда мы не поставим ни одного знака «+»), а ещё 35 посчитанных нами способов соответствуют сумме из двух слагаемых (это когда мы ставим один «+»). Значит, всего $2^{35}-36$ нужных нам сумм.)

4–4. Две прямые на плоскости, пересекающиеся под углом 46° , являются осями симметрии фигуры F. Какое наименьшее число осей симметрии может иметь эта фигура? (**90**. При симметрии одной оси относительно другой будет появляться новая ось симметрии, значит, все прямые, проходящие через одну точку и идущие через 2° (где $2 = \text{НОД}(360, 46)$), будут давать оси симметрии. Это будет $360:2=180$ лучей и, соответственно, 90 прямых – осей симметрии.)

4–5. По окончании математической игры «Домино» оказалось, что команда-победитель решила все задачи, а в графе «штраф» у неё «-2» балла. Сколько баллов могла в итоге набрать эта команда? (Любое целое число от 120 до 176. Заметим, что эта команда гарантированно набрала все большие «половины» баллов от каждой задачи-доминошки, в том числе и 10 за задачу «0-0», что составляет в сумме $10+7 \cdot 6+6 \cdot 5+5 \cdot 4+4 \cdot 3+3 \cdot 2+2 \cdot 1=122$, при этом команда действительно могла набрать это число баллов, если все задачи (кроме «0-0») она решила со второй попытки. С учётом 2 штрафных баллов команда набрала бы 120 баллов. Все же остальные баллы до 176 (178 – максимум при отсутствии штрафов) команда могла получить за счёт тех задач, которые она бы решила с первой попытки, что давало бы прибавки от 1 до 6 баллов, что гарантирует нам любой из возможных промежуточных итогов от 120 до 176.)

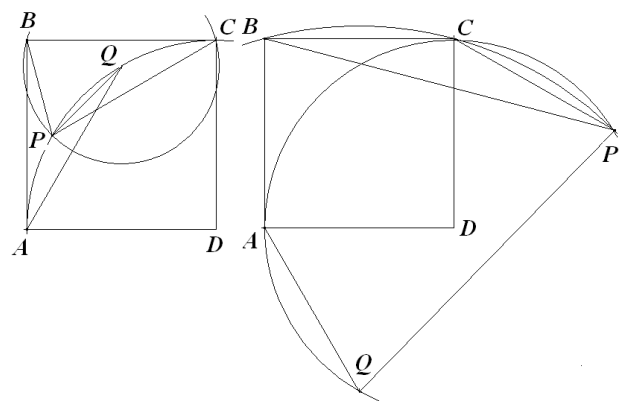
4–6. Пусть $ABCD$ – единичный квадрат, P и Q – такие точки, что Q – центр описанной окружности треугольника BPC , а D – центр описанной окружности треугольника PQA . Найти все возможные

значения длины отрезка PQ . ($PQ = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}}$. Q лежит

на серединном перпендикуляре к BC , $AD=DQ$, следовательно, $\triangle ADQ$ правильный. Существуют 2 варианта расположения Q : вне квадрата и внутри него. Если Q вне квадрата, то

$QC = \sqrt{0,5^2 + (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} < 1$, т.е. такое распо-

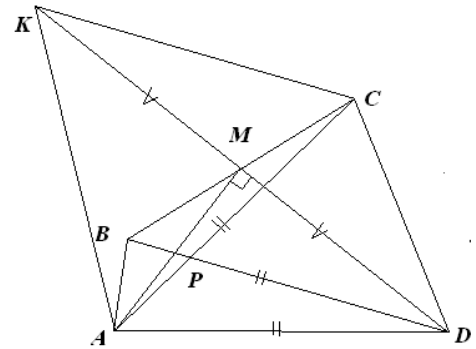
ложение возможно, т.к. окружности с центрами в Q и D и радиусами DA и QB соответственно пе-



ресекаются. $QP=QC=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Если Q внутри квадрата, то $PQ=QC=\sqrt{0,5^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.)

5–5. Точка M – середина стороны BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, в котором $AC=BD=AD$. Оказалось, что угол AMD – прямой. Чему может быть равен угол между диагоналями четырёхугольника $ABCD$?

(60°. Отложим на луче DM точку K таким образом, чтобы отрезки KM и DM были равны. Заметим, что тогда треугольники BMD и CMK будут равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $KC=BD$. Кроме того, в треугольнике KAD отрезок AM является высотой и медианой, значит, этот треугольник будет равнобедренным с $AD=AK$. Тогда из равенств $KC=BD=AC=AD=AK$ следует, что треугольник ACK – равносторонний. Тогда угол между диагоналями четырёхугольника равен 60° , т.к. BD и KC параллельны, а угол между прямыми KC и CA равен 60° .)



5–6. В натуральном ряду от 1 до $N \geq 2$ два игрока по очереди зачёркивают группы подряд идущих чисел, начиная с наименьшего из ещё не зачёркнутых, и отдают эту группу своему сопернику. Выигрывает тот, у кого первого произведения чисел будет делиться на фиксированное натуральное число K , где $2 \leq K \leq N$. При каких K и N при правильной игре выиграет первый игрок? (всегда выиграет первый – передача хода с помощью числа 1)

6–6. Из какого числа равносторонних треугольников со стороной 1 может состоять шестиугольник, все углы которого равны 120° , а все стороны различны и равны шести числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, стоящим в произвольном порядке? (65 или 67. Такой шестиугольник получается из правильного треугольника отрезанием трёх острых углов, тогда сумма любых двух соседних сторон шестиугольника равна сумме двух противоположных им сторон. В результате рядом с 6 не могут находиться 5, 4, а также 2 и 3 одновременно, значит, возможны с точностью до симметрии ровно 2 варианта порядка сторон - (6, 1, 4, 5, 2, 3) и (6, 1, 5, 3, 4, 2), получаемых из треугольников со сторонами 10 и 9 отрезанием треугольников со сторонами 1, 5, 3 и 1, 3, 2 соответственно. Тогда количества треугольников в этих шестиугольниках равны $10^2-1^2-5^2-3^2=65$ и $9^2-1^2-3^2-2^2=67$.)