

1. На столе лежат n камней. Два игрока по очереди берут камни из кучи; каждый игрок при своём ходе может взять любое количество камней, являющееся квадратом натурального числа. Проигрывает тот, кто не может ходить. Найдите все n , не превосходящие 50, при которых второй игрок выиграет при правильной игре обоих.
2. Найдите корни уравнения $x^4+6x^3-7x^2-18x+12=0$ и запишите их в порядке возрастания.
3. Назовём трёхзначное число *хребтовым*, если средняя цифра в его десятичной записи больше, чем крайние, и *овражным*, если его средняя цифра меньше крайних. Каких чисел и на сколько больше: хребтовых или овражных?
4. $N \geq 3$ команд участвуют в футбольном турнире. В некоторый момент оказалось, что любые две команды сыграли между собой не более, чем по одному разу, только "Металлург" и "Локомотив" сыграли дважды. При этом каждая команда сыграла хотя бы один матч. При каких N могло так случиться, что в этот момент все команды сыграли различное число игр?
5. M – середина катета AC , а точки N и K отмечены на гипотенузе $AB=2$ и катете $BC=1$. Какой наименьший периметр может иметь треугольник MNK ?
6. При скольких n из первой сотни произведение первых n натуральных чисел не делится на их сумму?
7. При каких значениях p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $2|x-1|+3|y+2| \leq p$, больше 3 и меньше 27?
8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в круг радиуса 5 так, что диагональ AC – диаметр круга. Диагонали четырёхугольника пересекаются в точке P . Известно, что $BD = AB$ и $PC = 2$. Найдите длину стороны CD .
9. В однокруговом футбольном турнире участвовало 6 команд. Команды набрали соответственно 13, 10, 7, 5, 3 и 2 очка. За победу даётся 3 очка, за ничью – 1, за проигрыш – 0. У какой из команд (и сколько) могло оказаться больше всего ничьих?
10. В таблице 10×10 по порядку расставлены все натуральные числа от 1 до 100 (в первой строке – от 1 до 10, во второй строке – от 11 до 20 и т.д.). Затем перед каждым из чисел поставлен знак "+" или "-" так, что в каждой строке и каждом столбце оказалось по шесть знаков "+" и четыре знака "-". Чему может быть равна сумма всех чисел таблицы с учётом расставленных знаков?
11. Координаты точек $A(a; b)$, $B(c; d)$, $C(e; f)$ удовлетворяют равенствам $a^2-4a+b^2-2b+2=0$, $c^2-4c+d^2-2d+2=0$, $e^2-4e+f^2-2f+2=0$. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник ABC ?
12. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $ху + 2x + 3y + 6z = ху + 2xz + 3yz$?
13. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность. $\angle A = \angle B = 120^\circ$, $\angle D = 90^\circ$, $|BC|=1$. Найдите длину стороны AD .
14. На шахматную доску, первоначально пустую, по очереди ставятся кони по следующему правилу: если только что поставленный конь кого-то побил, то один из побитых им коней снимается с доски. Какое наибольшее количество коней можно поставить на доску с соблюдением данного правила?
15. Назовём два различных натуральных числа *двойниками*, если суммы их цифр равны друг другу и произведения их цифр также равны друг другу (например, 124 и 2212 – двойники). Найдите все числа, у которых нет двойников.
16. Найдите сумму $\sin^3 18^\circ + \sin^2 18^\circ$. (ответ дать в максимально упрощённом виде)