

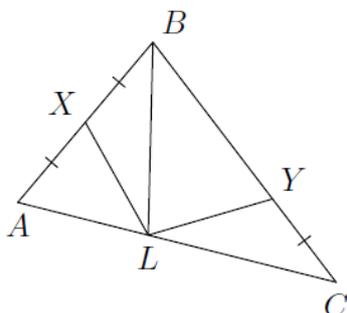
Тринадцатая Всероссийская смена «Юный математик»

Задания конкурсного отбора

9-10 классы

14 мая 2017 г.

1. Докажите, что при любых a и b хотя бы одно из уравнений $x^2 - 2ax + ab = 0$ и $x^2 - 2bx + ab = 0$ имеет решение.
2. Ненулевые числа a , b и c таковы, что числа $a(b - c)$, $b(c - a)$, $c(a - b)$ записанные в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что тогда и числа $a(b^3 - c^3)$, $b(c^3 - a^3)$, $c(a^3 - b^3)$ также образуют арифметическую прогрессию.
3. Из целых чисел от 0 до 301 Анна составила 151 пару и сложила числа в каждой из них, после чего нашла произведение полученных 151 сумм. Могло ли это произведение оказаться 15-й степенью натурального числа?
4. В школьном актовом зале стоят трехместные кресла: 20 рядов по 2 кресла. Во время концерта на каждом ряду сидели пятеро или трое ребят. Завуч Роза Михайловна посчитала, количество кресел, на которых сидело 3 человека и отдельно количество кресел, на которых сидел один человек. Найдите сумму полученных ею чисел.
5. Даны 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 40-го и 61-го чисел тоже больше 1000.
6. Конкурсную олимпиаду писало 6000 школьников. Каждый из них получил оценку от 0 до 8 баллов. При занесении в компьютер оценки 5, 6 или 7 баллов были заменены на 8 баллов, а оценки 1, 2 или 3 балла — на 0 баллов (остальные оценки не менялись). В результате средний балл всех участников вырос на 0,1 балла. Докажите, что до исправления можно было указать две такие оценки a и b , что число школьников с оценкой a баллов и число школьников с оценкой b баллов отличались не менее чем на 100.
7. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . Известно, что $\angle ABC = 2\angle ACB$. Точка X — середина стороны AB , а точка Y на стороне BC такова, что $CY = AX$. Докажите, что прямая XY касается описанной окружности треугольника LCY .



8. В ряд стоят мальчики и девочки. Среди каждых двухсот стоящих подряд ребят мальчиков и девочек одинаково, а среди любых 202 стоящих подряд — либо мальчиков больше, либо девочек. Какое наибольшее количество детей может быть в этом ряду?