Шестнадцатая Всероссийская смена «Юный математик»
Задания конкурсного отбора
Олимпиадная математика
8 класс
29 мая 2020 г.

1. В компании из 2020 человек среди любых четверых найдется человек, знающий трех других. Найдите наименьшее число тех, которые знают 2019 человек.

2. Окружности w_1 и w_2 пересекаются в точках P и Q. Касательная к w_2, проведённая в точке P, вторично пересекает w_1 в точке A_1. Аналогично касательная в точке P к w_1 пересекает w_2 в точке A_2. Известны длины отрезков PA_1 и PA_2. Можно ли найти длину отрезка PQ?

3. Целые числа a, b, c, d таковы, что $a - b + c - d$ нечетно и является делителем числа $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$. Докажите, что оно также является делителем числа $a^3 - b^3 + c^3 - d^3$.

4. На доске 6×6 стоят 6 не бьющих друг друга ладей. Каждая из оставшихся клеток окрашивается красным, если бьющие ее ладьи равноудалены от клетки и синим в противном случае. а) Могут ли все оставшиеся клетки быть красными? б) Синими?

5. В остроугольном треугольнике проведены высоты. Каждая из высот в пересечении с описанной окружностью образует хорду. Докажите, что середины этих трёх хорд являются вершинами треугольника, подобного исходному.

6. Числа $a, b, c > 0$. Докажите неравенство $(a + b)(a + c) \geq 2\sqrt{abc(a + b + c)}$.

7. В правильном 60-угольнике выбрана 21 вершина. Докажите, что среди выбранных вершин найдутся три, являющиеся вершинами равнобедренного треугольника.

8. Решите уравнение $p^3 - 2p^2 + p + 1 = 3^n$, где n – натуральное, а p – простое число.