Шестнадцатая Всероссийская смена «Юный математик»
Задания конкурсного отбора
Олимпиадная математика
9-10 классы
29 мая 2020 г.

1. Выясните, какое из чисел больше: $\sqrt[2019]{2019!}$ или $\sqrt[2020]{2020!}$
(где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ – произведение чисел от 1 до n).

2. Натуральные числа k, m, n удовлетворяют равенству $m^2 + n = k^2 + k$. Докажите, что $m \leq n$.

3. Известно, что окружности w_1 и w_2 пересекаются в точках P и Q. Касательная к w_2, проведённая в точке P, вторично пересекает w_1 в точке A_1. Аналогично касательная в точке P к w_1 пересекает w_2 в точке A_2. Необходимо узнать длины пяти отрезков: PA_1, PA_2, PQ, QA_1, QA_2. Рисунок нам не виден, но можно узнать длину любого из этих отрезков, заплатив за это 1000 р. Какой минимальной суммой можно обойтись для выяснения всех длин? *(Рисунок нам не виден, его видит КТО-ТО, кому мы платим).*

4. Назовем число *хорошим*, если для любого его простого делителя p, оно делится также на p^2. Докажите, что существует бесконечное множество пар последовательных натуральных чисел, таких, что оба числа в паре хорошие.

5. Решите уравнение $2a^2 + 3a - 44 = 3p^n$, если $a, n -$ натуральные, а p – простое.

6. Каждый из членов парламента имеет не более 20 врагов. Парламент случайным образом разбили на два палаты: гранд и премьер. Цель – чтобы в гранд каждый имел не более 15 врагов в своей палате, а в премьер, чтобы каждый имел не более 5 врагов в своей палате. За один шаг можно выбрать любого парламентария, нарушающего одно из данных правил и перевести в другую палату. Докажите, что данный процесс конечен.

7. Верно ли, что из четырёх высот произвольного тетраэдра можно выбрать три, из которых складывается треугольник?

8. На окружности отмечено $2n$ точек. Сколько существует способов разбить их на n пар и соединить пары непересекающимися стрелками так, чтобы не нашлось двух стрелок $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ таких, что точки A, B, C, D расположены по часовой стрелке (не обязательно последовательно).