

Всероссийская смена “Юный математик” — 2020 • Машинное обучение и анализ данных • Задания конкурсного отбора • 29.05.2020

Уважаемые участники!

Перед вами задачи конкурсного отбора для участия во Всероссийской смене “Юный математик” по направлению “Машинное обучение и анализ данных”. Первые пять задач математические и предполагают написание решений с подробным объяснением, а не только получение ответов. Решения необходимо прикрепить в системе сдачи работ в легко читаемом виде.

Последние три задачи предполагают написание программ. Записывать решения для них не обязательно. Доступные языки — Python, C++, Pascal и Java.

Для сдачи задач вам необходимо зарегистрироваться на платформе Яндекс.Контест и войти в соревнование по ссылке. **Пожалуйста, не забудьте указать ваш логин в Яндекс.Контесте в решениях математической части, чтобы мы могли вас идентифицировать.**

<https://contest.yandex.ru/contest/18596/enter/>.

Появившиеся вопросы по условиям и работе Яндекс.Контеста можно задать по адресу

<https://contest.yandex.ru/contest/18596/messages/>.

## Часть 1. Математика

1. Найдите наименьшее натуральное число  $N$ , такое что число  $\overline{20N20}$  (то есть число, полученное из  $N$  приписыванием «20» в начало и в конец) делится на 2020.
2. У Пети и Васи есть куб  $3 \times 3 \times 3$ , который состоит из 27 клеток (кубиков  $1 \times 1 \times 1$ ). Петя заполняет  $n$  клеток этого куба «ноликами». После чего Вася хочет поставить в свободные клетки три «крестика» так, чтобы они стояли в ряд (то есть на одной прямой). При каком наименьшем значении  $n$  Петя сможет ему помешать?
3. Действительные числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворяют условию  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Найдите наибольшее возможное значение выражения  $|x - y| + |y - z| + |z - x|$ .
4. Дана последовательность функций  $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ . Известно, что  $f_0(x) = 1$ ,  $f_n(0) = 0$  для всех натуральных  $n$ . Кроме того, их производные удовлетворяют

следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}f_1'(x) &= f_0(x + 1), \\f_2'(x) &= 2f_1(x + 1), \\&\dots \\f_n'(x) &= nf_{n-1}(x + 1), \\&\dots\end{aligned}$$

Найдите  $f_{100}(1)$ .

5. Дан набор из  $n$  действительных чисел, не обязательно целых. Известно, что любое целое число от 2 до 20 можно представить как произведение некоторых чисел этого набора (возможно, с повторениями сомножителей). При каком наименьшем  $n$  такое возможно?

## Часть 2. Программирование

Условия также доступны в констесте.

### 6. Интересная сумма

Вы — шпион, который хочет передать данные, о которых вы узнали во время одной очень опасной миссии, но впереди осталось еще одно испытание. Если данные передавать в том виде, в котором они были, то вас быстро раскроют, поэтому вы решили их зашифровать. Так как каждая строка данных это два числа:  $L$  и  $R$  ( $L \leq R$ ), то вы решили каждую строку отправлять в виде суммы  $\sum_{L \leq a, b \leq R} (a^b \cdot (a - 1))$ .

Так как в шпионской академии математике вас не учили, но зато вы хороший программист, то требуется написать программу, которая производит расчеты за вас.

#### Формат входных данных

В первой строке записано число  $t$  ( $t \leq 20$ ) — количество записок, которые необходимо расшифровать. В следующих  $t$  строках записаны по два числа  $L$  и  $R$  ( $1 \leq L \leq R \leq 10^5$ ) — обнаруженные вами данные.

#### Формат выходных данных

Для каждой строки данных выведите ее в зашифрованном виде. Так как числа могут быть большими, то выведите их по модулю  $10^9 + 7$ .

## 7. Изображения

Вы обучили нейросеть, которая ищет прямоугольные объекты на изображении. Результат она вам выдает в виде набора из  $N$  прямоугольников длиной  $w$  и высотой  $h$ . К сожалению, нейросеть может сбить и выдавать лишние прямоугольные объекты.

Назовем прямоугольник лишним, если его можно вложить в какой-то другой из набора. Прямоугольник можно вложить в другой, если его ширина и длина строго меньше длины и ширины другого. При этом некоторые изображения могут быть повернуты на 90 градусов.

Вам необходимо найти количество **не** лишних прямоугольников.

### Формат входных данных

Первая строка содержит натуральное число  $N$  ( $2 \leq N \leq 3 \cdot 10^5$ ) — количество найденных нейросетью прямоугольников.

Следующие  $N$  строк содержат по два натуральных числа  $w_i, h_i$  ( $1 \leq w_i, h_i \leq 10^9$ ) — длина и высота прямоугольных изображений.

### Формат выходных данных

Вывести единственное число — ответ на задачу.

## 8. Циклическая подстрока

Вам дан текст  $T$ , в котором ищут паттерн (тоже строку)  $P$ . Но не все так просто, а именно, надо искать не только паттерн, но и все его циклические сдвиги. Нужно найти количество вхождений (возможно, пересекающихся) всех циклических сдвигов паттерна в тексте.

Отметим, что, например, циклическими сдвигами паттерна « $abc$ » являются следующие строки: « $abc$ », « $bca$ », « $cab$ ».

### Формат входных данных

На первой строке вам дан паттерн  $P$  ( $1 \leq |P| \leq 10^6$ ). На второй дан текст  $T$  длиной до  $10^6$  символов. Обе строки состоят из латинских строчных букв.

### Формат выходных данных

Выведите ответ на задачу.