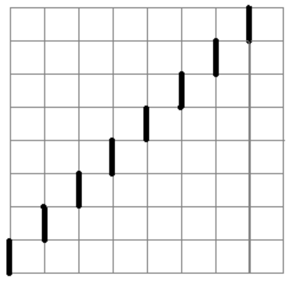
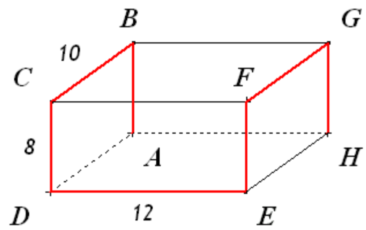
XVII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XIV Турнир математических игр.
Игра «Домино». ***<u>Младшая лига (7-8 класс).</u>*** **<u>Решения</u>. 09.09.2021.**



0–0. На клетчатой плоскости нарисован квадрат 8×8 клеток. Какое наибольшее количество сторон клеток можно отметить внутри или на границе этого квадрата, чтобы никакой квадрат не содержал двух отмеченных сторон клеток? (Эти квадраты могут вылезать за пределы исходного). *Приведите ответ и пример*. **(<u>8</u>, см. пример на рисунке. Действительно, в этом случае расстояние между любыми двумя вертикальными отмеченными отрезками по горизонтали меньше, чем по вертикали, когда они попадут на противоположные вертикальные стороны прямоугольника. Значит, нет квадрата с двумя отмеченными отрезками на сторонах. *<u>Доказательство оценки</u>:* Отмечать сразу и вертикальный, и горизонтальный единичный отрезок нельзя, т.к. тогда эти отрезки окажутся соседними на двух сторонах бесконечного количества квадратов. Значит, все отрезки должны быть одного направления, например, вертикальные (с точностью до симметрии). Но тогда в каждом ряду (горизонтальном) можно отметить не более одного отрезка, иначе существует квадрат со стороной, равной расстоянию между этими отрезками, а на вертикальных сторонах квадрата окажутся эти отмеченные отрезки. Значит, в каждом из 10 горизонтальных рядов можно отметить не более одного отрезка, следовательно, будет не более 10 отмеченных отрезков.)**

0–1. В Десятицифрии все номера МТС начинаются на 910 и состоят из 10 различных цифр. Какое наибольшее количество номеров МТС в Десятицифрии может делиться на 6? **(<u>2880</u>. Эти номера согласно признаку делимости уже делятся на 3, т.к. их сумма цифр равна 45 и делится на 3. Значит, для делимости на 6 они должны быть чётными. Тогда последняя (чётная) цифра выбирается 4 способами (2, 4, 6, 8), а на остальных 6-ти местах надо расставить 3 остальные чётные и 3 нечётные (3, 5, 7) цифры, что можно сделать 6! способами. Всего 4·6!=2880 вариантов.)**

0–2. Муравей, ползая по каркасу прямоугольного параллелепипеда размерами 8 см×10 см×12 см, побывал во всех вершинах этого параллелепипеда. Найдите наименьшую возможную длину пути муравья. **(<u>64 см</u>. Разобьём вершины, соединённые ребром длины 8 см, на пары (*AB, CD, EF, GH* – см. рис.). Заметим, что для связного маршрута по всем вершинам надо иметь хотя бы три перехода в другие пары, т.е. это даёт хотя бы три переползания по рёбрам длины 10 и 12. При этом хотя бы 1 раз муравей прополз по ребру длины 12, т.к. из одной боковой грани (где он находился изначально) он обязан переползти в другую боковую грань, которые соединены между собой только рёбрами длины 12 (разместим для удобства наш параллелепипед так, чтобы это были левая (*ABCD*) и правая (*EFGH*) боковые грани – см. рис.). Тогда маршрут муравья имеет длину не меньше 12+2·10+4·8=64 и такую длину имеет маршрут *ABCDEFGH* (см. рис.).)**



0–3. Вася вычеркнул в 100-значном числе, кратном 8, каждую третью цифру (начиная с первой справа, т.е. 1-ю, 4-ю, 7-ю и т.д.) и получил число, равное натуральной степени пятёрки. Укажите три последние цифры изначального числа. **(<u>256</u>. Заметим, что любое число, являющееся степенью пятёрки и не равное пяти, заканчивается на 25. В нашем числе последняя вычеркнутая цифра с номером 100 ≡ 1 (mod 3), значит, новое число заканчивается на цифры с номерами 98 и 99, тогда они равны 2 и 5 соответственно. Для выполнения признака делимости на 8 надо, чтобы последние три цифры $\overline{25p}$ давали трёхзначное число, кратное 8. А это возможно только при *p*=6.)**

0–4. Четвёрку гирь назовём *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди 5 гирь различного веса? *Приведите ответ и пример с обоснованием.* **(<u>2 сбалансированных четвёрки, например, гири веса 1, 2, 3, 6, 11, где 2 сбалансированные четвёрки – 1+2+3=6, 2+3+6=11</u>. Упорядочим гири по возрастанию веса: $m_1<m_2<m_3<m_4<m_5$. Рассмотрим гирю наибольшего веса m_5, заметим, что она входит во все четверки, кроме од-**

ной, которая может быть сбалансированной (из четырёх самых меньших по весу гирь – $m_1+m_2+m_3=m_4$). Рассмотрим все четвёрки, в которые входит m_5. Пусть одна из них – *сбалансирована* (иначе не более одной *сбалансированной* четвёрки), т.е. $m_i+m_j+m_k=m_5$, где $1\le i<j<k\le 4$. Тогда больше с гирей наибольшего веса нет *сбалансированных* четвёрок т.к. все остальные четвёрки – четверки, где одна из гирь заменена на другую, а гирь равного веса нет по условию. Значит, всего не больше двух *сбалансированных* четвёрок.)

0–5. Найдите наибольшее возможное значение разности пятизначных чисел $\overline{ОСЕНЬ}-\overline{ВЕСНА}$, если $О\cdot С\cdot Е\cdot Н\cdot Ь\neq В\cdot Е\cdot С\cdot Н\cdot А$. (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*) (**85407**. **Заметим, что цифры *С, Е* и *Н* не равны 0 в силу неравенства** $О\cdot С\cdot Е\cdot Н\cdot Ь\neq В\cdot Е\cdot С\cdot Н\cdot А$.

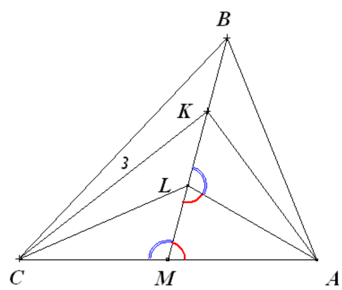
$\overline{ОСЕНЬ}-\overline{ВЕСНА}=10000\cdot\overline{О}+900\cdot\overline{С}+\overline{Ь}-\overline{А}-900\cdot\overline{Е}-10000\cdot\overline{В}$**, тогда согласно транснеравенству и с учётом отличия от нуля цифр (*В, С, Е* и *Н*) наибольшее значение будет приниматься при** $\overline{О}=9,\ \overline{С}=8,\ \overline{Ь}=7,\ \overline{А}=0, \overline{Е}=2, \overline{В}=1$**, при этом *Н* может принимать какое-то значение из пяти оставшихся цифр (3, 4, 5, 6), тогда** $10000\cdot\overline{О}+900\cdot\overline{С}+\overline{Ь}-\overline{А}-900\cdot\overline{Е}-10000\cdot\overline{В}\le 10000\cdot 9+900\cdot 8+7-0-900\cdot 2-10000\cdot 1=$ $=85407$**, т.е., например, 98237–12830=85407, что ещё и удовлетворяет условию 9·8·2·3·7≠1·2·8·3·0 (**$О\cdot С\cdot Е\cdot Н\cdot Ь\neq В\cdot Е\cdot С\cdot Н\cdot А$**).)**

0–6. В шестизначном числе зачеркнули одну цифру и получили пятизначное. Из исходного числа вычли это пятизначное число и получили 654321. Найдите исходное число. **(727 023. Заметим, что зачёркнута была последняя цифра, т.к. в противном случае после вычитания последняя цифра числа была бы нулевой. Пусть *y* – последняя цифра исходного числа, *x* – пятизначное число после зачёркивания. Тогда полученное число равно 10*x*+*y*–*x*=9*x*+*y*=654 321. Деля это число на 9 с остатком (и учитывая, что *y* не превосходит 9), получим остаток *y*=3 и частное *x*=727 02.)**

1–1. Построим последовательность чисел следующим образом. На первом месте поставим число 7, далее за каждым числом поставим сумму цифр его квадрата, увеличенную на единицу. Например, на втором месте будет стоять число 14, так как $7^2 = 49$, а 4+9+1=14. На третьем месте - число 17, так как 14^2 =196, а 1+9+6+1=17 и так далее. Какое число стоит на 2021-м месте? **(5. Найдём несколько первых членов последовательности: 7; 14; 17; 20; 5; 8; 11; 5; … – число 5 повторилось. Значит, у последовательности есть период длины 3: числа 5; 8; 11 далее будут повторяться. На шестом месте – 8, тогда на любом месте, кратном 3, также будет 8, в том числе и на 3·672=2019-м, значит, на 2021-м – 5.)**

1–2. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99 и записываемое только единицами и двойками. **(1122222222, у которого сумма цифр равна 18, а знакочередующаяся сумма цифр равна 0, т.е. оно делится и на 9, и на 11 по признакам делимости, значит, делится и на 9·11=99, т.к. числа 9 и 11 – взаимно просты. По признакам делимости на 9 и 11 получаем, что сумма цифр $S(n)$ нашего числа *n* делится на 9, а знакочередующаяся сумма цифр $S_\pm(n)$ делится на 11. Если найдётся число, меньшее 1122222222, то у него не более 10 цифр, значит, $S(n)\le 2\cdot 10=20$. Тогда она либо 9, либо 18. Но ровно 9 она быть не может, т.к. в силу её нечётности получим нечётную $S_\pm(n)$, по модулю не превосходящую 9, т.е. не будет выполняться признак делимости на 11. Значит, $S(n)=18$. Наименьшим будет число из 9 двоек, которое не делится на 11. Следующим по величине будет число 1122222222, которое нам уже подходит, т.е. оно и будет наименьшим.)**

1–3. За какое наименьшее время часовая и минутная стрелки часов могут поменяться местами? (Т.е. минутная стрелка должна оказаться на исходном месте часовой, а часовая — на исходном месте минутной.) **(12/13 часа. Пусть стрелки поменялись местами через время *t*, которое очевидным образом меньше часа (часовая догонит бывшее положение минутной, а минутная пройдёт почти полный круг) и вместе они пройдут круг. Минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой, минутная пройдёт 12/13 от всего круга, т.е. *t*=12/13 часа.)**



1–4. На медиане *BM* треугольника *ABC* отмечены такие точки *K* и *L*, что *BK* = *KL* = *LM*. Оказалось, что *AM* = *AL* и *CK* = 3. Найдите длину какой-нибудь стороны треугольника *ABC*. **(*AB*=3. Учитывая равно-**

бедренность ($AM=AL$) треугольника AML, получим, что треугольники ALB и CMK равны по двум сторонам ($AL=AM=CM$, $LB=MK$ – состоят из двух равных частей) и углу между ними ($\angle ALB=180°-\angle ALM=180°-\angle AML=\angle CML=\angle CMK$), значит, $AB=CK=3$.)

1–5. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что для любых 15 натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_{15} число $a_1a_2...a_{15}(a_1^n+a_2^n+...+a_{15}^n)$ делится на 15. (**<u>4</u>. При $n\le 3$ есть контрпример: первые 14 чисел равны 1, а 15-е равно 2, т.е. числа не кратны ни 3, ни 5. Тогда при $n=1$ у нас сумма чисел равна 16 и нет делимости всего произведения ни на 3, ни на 5. При $n=2$ у нас сумма квадратов равна 18 и нет делимости всего произведения на 5. При $n=3$ нас сумма кубов равна 22 и нет делимости всего произведения ни на 3, ни на 5. Пусть $n=4$. Если одно из чисел делится на 3 и одно из чисел делится на 5 (возможно, что одно и то же число), то общее произведение точно делится на 15. Рассмотрим случай, когда нет чисел, кратных 3 или 5. Тогда по малой теореме Ферма $(a_i^2)^2\equiv 1^2\equiv 1 \pmod 3)$, $a_i^4\equiv 1 \pmod 5)$, тогда $a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4+\ldots+a_{15}^4\equiv 15\equiv 0$ и по модулю 3 и по модулю 5. Значит, в этом случае на соответствующее число (3 или 5) разделится множитель-сумма 4 степеней.)**

1–6. Какое наибольшее количество фишек можно разместить на поле 100×100, чтобы среди них не нашлось двух таких фишек, когда одна стоит строго правее и строго выше другой? (**<u>199</u>, когда заняты, например, верхняя строка и правый столбец**. ***<u>Доказательство оценки 1 (принцип крайнего)</u>:*** **Рассмотрим самую правую из самых верхних фишек (рис.1). Слева от неё в одной с ней строке стоит ещё не более 99 фишек, ниже её в одном с ней столбце стоит ещё не более 99 фишек, а ниже и левее этой фишки других фишек не должно быть. Значит, у нас не более 1+2·99=199 фишек.** ***<u>Комментарий</u>: Но … в этом рассуждении допущена грубая ошибка, которая … приводит к отсутствию верного доказательства оценки:☺. Поэтому приведём всё-таки верное доказательство. <u>Доказательство оценки 2 (разбиение на части)</u>:*** **Разобьём доску на 199 диагоналей, параллельных главной диагонали из левого нижнего в правый верхний угол (рис.2), на каждой из них стоит не более 1 фишки (иначе найдутся две фишки, принадлежащие одной диагонали, – они дадут нам плохую пару фишек). Значит, всего не более 199 фишек.)**

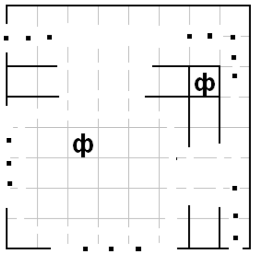


рис.1

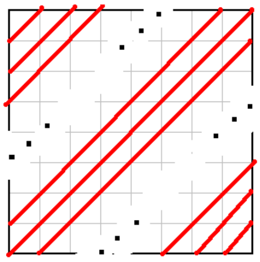
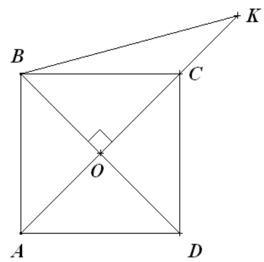


рис.2

2–2. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK = AC$. Найдите угол BKC. (**<u>30°</u>. Пусть O – центр квадрата, тогда в прямоугольном треугольнике OBK гипотенуза $BK=AC=BD=2\cdot BO$, т.е. гипотенуза BK в 2 раза больше катета BO, значит, OBK – прямоугольный треугольник с $\angle BKO=30°$, что нам и надо было найти.)**



2–3. Приведите пример натурального числа n такого, что для некоторых натуральных a и b выполняется равенство $n=\dfrac{a^2-1}{2}=\dfrac{b^2-1}{3}$. *Пример обосновать.* (**<u>$n=40$, тогда $a=9$, $b=11$</u>**)

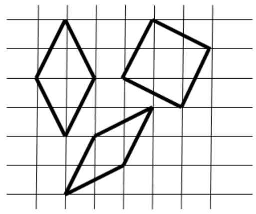
2–4. Вася купил два одинаковых набора из 10 палочек, длины которых равны разным степеням двойки (1, 2, 4, 8, …, 2^9). Сколько разных треугольников он может составить, выбирая три палочки из них? (**<u>45</u>. Из трёх разных степеней двойки составить треугольник не удастся, т.к. при натуральных различных $a>b>c$ имеем $2^a=2\cdot 2^{a-1}\ge 2b>b+c$. Если же взять две одинаковые палочки, то с большей по длине палочкой составить треугольник не удастся, а с любой меньшей удастся. Значит, количество треугольников равно количеству способов выбрать пару разных отрезков, больший из которых надо взять дважды, т.е. это число сочетаний из 10 по 2, равное $C_{10}^2=\dfrac{10\cdot 9}{2}=45$.)**

2–5. На столе стоит столбик из 20 монет. Все соседние монеты лежат герб к гербу, решка к решке. Разрешено брать сверху столбик из нескольких монет (возможно, все монеты), целиком его переворачивать и ставить обратно на оставшиеся монетки. За какое наименьшее число таких переворачиваний можно добиться, чтобы все монеты легли решкой в одну сторону? (**<u>19</u>. Рассмотрим пару соседних монет. Если они в столбике лежат герб к решке, назовем её «правильной» парой и «неправильной» в противном случае. Всего в столбике из 20 монет изначально 19**

неправильных пар соседних монет и в конце все эти пары должны стать правильными. Но при каждом переворачивании разрывается только одна пара, поэтому при каждом переворачивании количество неправильных пар может уменьшиться не более, чем на одну, и, следовательно, требуется не менее 19 переворачиваний. Пример: переворачиваем верхнюю монету, затем переворачиваем две верхних монеты и т. д. Девятнадцатым переворотом перевернём 19 монет и получим столбик из 20 монет, лежащих решкой в одну сторону.)

2–6. Приведите пример шести различных несократимых дробей таких, что знаменатель каждой из них больше 50, но меньше 100, а знаменатель любой суммы нескольких этих дробей после сокращения становится меньше 50. *Пример обосновать.* **(**$\frac{1}{60}, \frac{61}{60}, \frac{121}{60}, \frac{181}{60}, \frac{241}{60}, \frac{301}{60}$ **, где числители образуют арифметическую прогрессию с разностью 60=2^2·3·5 и взаимно просты со знаменатлем 60, т.к. при делении на 60 имеют остаток 1. Тогда знаменатель суммы любых *N* таких дробей имеет при делении на 60 остаток *N* в пределах от 2 до 6, а сама дробь суммы станет сократимой на *N*, т.к. 60 делится на все целые числа от 2 до 6, и после сокращения знаменатель станет не больше 30, что меньше 50.)**

3–3. На клетчатой бумаге постройте три ромба с вершинами в узлах сетки, периметры которых равны, а площади выражаются тремя последовательными натуральными числами. **(Площади изображённых ромбов соответственно равны 3, 4, 5.)**



3–4. Девять школьников образовали несколько групп в социальной сети. В каждую группу входят ровно трое школьников, и для любых двух групп не более чем один из школьников входит в обе группы. Каково наибольшее возможное количество групп? **(<u>12</u>. Рассмотрим граф, в котором вершины – школьники, а рёбра – участие двух школьников в одном клубе. Тогда каждый клуб – это треугольник (цикл длины 3), причём треугольники не могут иметь общих сторон, т.к. для любых двух клубов не более чем один из школьников посещает их оба. Значит, всего клубов не более трети от максимального числа рёбер, т.е. не более** $\frac{C_9^2}{3} = \frac{9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 12$**. Приведём распределение школьников по клубам в виде таблицы 9×13, где каждому школьнику соответствует строка, а клубу – столбец. Тогда для любых двух столбцов будет максимум по одной строке с обеими отмеченными клетками в этих столбцах (см. рис.).)**

группы

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ш	1	X			X			X			X		
к	2	X				X			X			X	
о	3	X					X			X			X
л	4		X		X					X		X	
ь	5		X			X		X					X
н	6		X				X		X		X		
и	7			X	X	X	X						
к	8			X				X	X	X			
и	9			X							X	X	X

3–5. Число называется *палиндромом*, если оно одинаково читается как слева, так и справа (например, число 2002 — палиндром, а 2020 — нет). Сколько существует пятизначных палиндромов *x* таких, что и число 3*x* также палиндром? **(<u>48</u>. Представим наше *n*-значное число *x* в виде суммы двух палиндромов – первый *p* (*n*-значное число, назовём *примитивным*) состоит только из цифр от 0 до 3, второй *u* (назовём *избыточным*, до *n*–значного доведём приписыванием 0 в начале) состоит из 0 и цифр, получаемых из *x* вычитанием цифр примитивного палиндрома в соответствующих разрядах, например, *x*=209373902= 203333302 + 006040600 = *p*+*u*. Тогда 3*x* равен сумме палиндрома 3*p*, получающегося умножением на 3 примитивного палиндрома (т.к. переходов в следующий разряд после умножения на 3), и числа 3*u*, утроенного избыточного палиндрома. При умножении на 3 за счёт самого старшего ненулевого разряда избыточного палиндрома в числе 3*x* произойдёт переход в следующий разряд максимум 2 (т.к. имеем максимум 3·9=27), значит, в палиндроме 3*x* цифра в соответствующем разряде будет отличаться от цифры в этом разряде утроенного примитивного палиндрома, но в симметричном разряде на конце у 3*x* и 3*p* стоят одинаковые цифры. Значит, 3*x* не будет палиндромом, если избыточное для него число u не будет тождественным 0. Следовательно, наш палиндром *x* является *примитивным*, т.е. содержит только цифры 0, 1, 2 и 3. Тогда количество таких 5-значных палиндромов равно 3·4·4=48, т.к. первая цифра – 3 варианта (без нуля), вторая и третья – по 4 варианта, остальные определяются однозначно по первым двум.)**

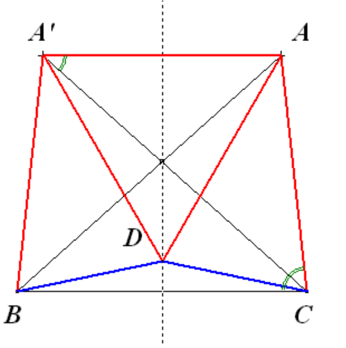
3–6. Сколько существует 18-значных чисел, в которых каждая ненулевая цифра встречается по 2 раза, и дающих максимально возможную сумму всех пятнадцати четырёхзначных чисел, составленных из четвёрок цифр, стоящих подряд? *Ответ дать числом в десятичной записи.* **(<u>7484400</u>.**

Пусть число $n=\overline{a_1a_2...a_{18}}$, тогда сумма 15-ти четырёхзначных чисел после представления по разрядам равна $1000a_1+1100a_2+1110a_3+1111(a_4+a_5+…+a_{15})+111a_{16}+11a_{17}+a_{18}$ и тогда согласно транснеравенству наибольшая сумма будет тогда, когда к коэффициентам по убыванию будем ставить и цифры по убыванию, т.е. $a_{18}=a_{17}=1$, $a_{16}=a_1=2$, $a_2=a_3=3$, а остальные цифры уже можно ставить в любом порядке. А количество таких чисел равно количеству перестановок с повторениями, когда каждую из 6 остальных цифр повторяем по 2 раза, т.е. $P(2,2,2,2,2,2)=\dfrac{12!}{2^6}=7484400$**.)**

4–4. Вася выписывает на доску в порядке возрастания все числа, являющиеся степенями тройки, а также суммами различных степеней тройки: 1; 3; 4; 9; 10; 12; 13; 27; 28; 30; 31, … . Какое число у Васи на 2050 месте? **(<u>$3^{11}+3$</u>. Запишем числа нашей последовательности в троичной системе счисления: 1, 10, 11, 100, 101, … В результате получим весь натуральный ряд в двоичной системе счисления. Значит, надо найди двоичную запись числа $2050=2048+2=2^{11}+2^1=100000000010_2$, которая и даст нужный нам ответ уже в троичной системе счисления.)**

4–5. В шахматном турнире принимали участие 7-классники и 8-классники, причём 7-классников было в 3 раза больше, чем 8-классников. Каждый участник турнира встречался с каждым ровно один раз. При подведении итогов турнира оказалось, что 7-классники набрали вместе на 20% очков больше, чем 8-классники. Сколько школьников могло участвовать в турнире? *За победу в шахматах даётся 1 очко, за ничью — 1/2 очка, а за поражение — 0 очков.* **(<u>12 школьников</u>. Пусть было a 8-классников и $3a$ 7-классников, тогда вместе они разыграли** $S=C_{4a}^2=\dfrac{4a(4a-1)}{2}$ **очков. При этом количество очков 7-классников равно $6S/11$, 8-классников – $5S/11$, и S должно делиться на 11. В партиях между собой 7-классники разыграли** $C_{3a}^2=\dfrac{3a(3a-1)}{2}\le\dfrac{6S}{11}$ **очков. Тогда из этого неравенства получаем, что** $\dfrac{3a(3a-1)}{2}\le\dfrac{6}{11}\cdot\dfrac{4a(4a-1)}{2}\Leftrightarrow 11(3a-1)\le 8(4a-1)\Leftrightarrow a\le 3$**, но только при a=3 сумма S делится на 11. При этом описываемая ситуация возможна, если все 7-классники сыграли между собой вничью и проиграли все свои партии 8-классникам, набрав вместе в сумме** $C_9^2=\dfrac{9\cdot 8}{2}=36$ **очков, что ровно на 20% больше очков 8-классников** $C_{12}^2-C_9^2=\dfrac{12\cdot 11}{2}=36=66-36=30$**.)**

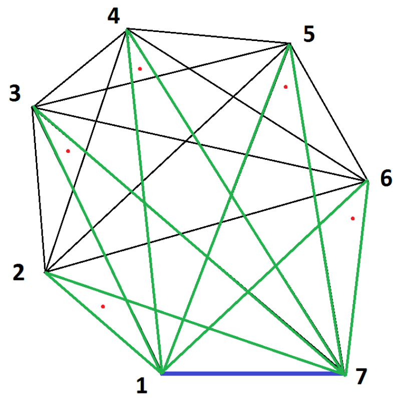
4–6. В треугольнике ABC $\angle C=2\angle B$. Внутри треугольника нашлась точка D такая, что $AD=AC$ и $DB=DC$. Какие значения может принимать $\angle ABD$? **(<u>30°</u>. Рассмотрим равнобочную трапецию $A'ACB$ (возможно прямоугольник, если $\angle ACB$=90°), симметричную относительно серединного перпендикуляра к ВС, на котором лежит точка D (см. рис.). Пусть $\angle DBA=\alpha$, $\angle DBC=\beta$, тогда $\angle BCA=2\angle ABC=2\alpha+2\beta$, $\angle AA'C=\angle A'CB$ (накрест лежащие) $=\angle ABC$ (симметрия) $=\angle ACB/2=\alpha+\beta=\angle A'CA$, значит, треугольник $A'AC$ – равнобедренный. Тогда $A'A=AC=AD=A'D$, т.е. треугольник $A'AD$ – равносторонний. $\angle BDC=180°-2\beta$, $\angle BDA'=\angle ADC=\angle ACD=2\alpha+\beta$, откуда $360°=\angle A'DA+\angle ADC+\angle CDB+\angle BDA'=60°+(2\alpha+\beta)+(180°-2\beta)+(2\alpha+\beta)=240°+4\alpha$ и α=30°.)**



5–5. Найдите последнюю цифру перед запятой в десятичной записи числа $\dfrac{10^{190}}{10^{10}+3}$. **(<u>8</u>. Выделим целую часть нашей дроби, для этого начнём в числителе добавлять и вычитать равные числа следующим образом: $+3\cdot(10^{10})^{18}-3\cdot(10^{10})^{18}-3^2\cdot(10^{10})^{17}+3^2\cdot(10^{10})^{17}+3^3\cdot(10^{10})^{16}-…+3^{17}\cdot(10^{10})^2-3^{17}\cdot(10^{10})^2-3^{18}\cdot10^{10}+3^{18}\cdot10^{10}+3^{19}-3^{19}$. После деления на $10^{10}+3$ получим число вида**

$10N+3^{18}-\dfrac{3^{19}}{10^{10}+3}$, где N – некоторое натуральное число. Значит, последняя цифра перед запятой равна a–1, где a – последняя цифра числа 3^{18}, которое сравнимо с $9^9\equiv(-1)^9\equiv-1\equiv9$ (mod 10), т.е. a=9. Вычитаем 1 в силу того, что вычитаемая дробь меньше 1, т.к. знаменатель больше числителя: $10^{10}+3>9^{10}=3^{20}>3^{19}$. Значит, последняя цифра перед запятой равна 8.)

5–6. Набор точек внутри выпуклого 2021-угольника назовём *хорошим*, если любые три вершины нашего 2021-угольника образуют треугольник, внутри которого есть точка этого набора. Какое наименьшее количество точек может содержать хороший набор? **(<u>2019</u>. Рассмотрим в общем виде произвольный выпуклый n-угольник. Необходимо не менее n–2 точек, т. к. диагонали из одной вершины разбивают n-угольник на n–2 непересекающихся треугольника. Расположим n–2 точек следующим образом (на примере 7-угольника – см. рис.). Выберем любую сторону (1-7, синяя). Для каждой из остальных вершин рассмотрим угол, опирающийся на эту сторону (зеленый). Поставим точку в треугольнике, отсекаемом от этого угла отрезком между соседними с ней вершинами. Тогда для любых трёх вершин $a<b<c$ в треугольнике abc будет точка при вершине b: так как, если вместо a взять 1, то количество точек внутри треугольника abc, согласно нашей расстановке, не увеличится. Аналогично, можно вместо c взять n (в данном случае 7). Но по нашей расстановке внутри любого треугольника 1bn есть точка.)**



6–6. Сколько существует натуральных $k\le1000$, обладающих следующим свойством: если в квадрате 1000×1000 закрасить нечётное число клеток, то найдется прямоугольник со сторонами 1 и k, в котором закрашено нечётное число клеток? **(<u>16</u>. Если 1000 делится на k, то разобьём квадрат на прямоугольники 1×k, например, горизонтально. В сумме количество закрашенных клеток в них нечётно, значит, хотя бы в одном из этих прямоугольников также будет нечётное количество закрашенных клеток, что нам и требуется. Количество натуральных делителей числа 1000 равно $\tau(1000)=\tau(2^3\cdot5^3)=(3+1)\cdot(3+1)=16$. Докажем теперь, что при k, не являющемся делителем числа 1000, существует такая раскраска с нечётным количеством закрашенных клеток, что в любом прямоугольнике 1×k будет чётное (ровно 2) количество закрашенных клеток. Применим пока диагональную раскраску в k цветов. В любом прямоугольнике 1×k каждый цвет встречается один раз. Справа сверху отрежем квадрат a×a, где a – остаток при делении 1000 на k. $1\le a<k$, значит, количество диагоналей одного направления в оставшемся квадрате равно $2a-1\le2k-3$. Пронумеруем цвета диагоналей, начиная с правого верхнего угла параллельно главной диагонали из левого верхнего в правый нижний угол. Если $k\le2a-1$, то в квадрате a×a встречаются только одна диагональ k-ого и k-1-ого цвета (см. пример на рис.1 для k=6, a=4). Если $k\ge2a-1>1$, то диагонали первого и второго цвета встречаются по одному разу (см. рис.2 для k=12, a=4).**

1000 - a | a

2	1	6	5	4	3	2	1
3	2	1	6	5	4	3	2
4	3	2	1	6	5	4	3
5	4	3	2	1	6	5	4
6	5	4	3	2	1	6	5
1	6	5	4	3	2	1	6
2	1	6	5	4	3	2	1
3	2	1	6	5	4	3	2

рис.1

1000 - a | a

8	7	6	5	4	3	2	1
9	8	7	6	5	4	3	2
10	9	8	7	6	5	4	3
11	10	9	8	7	6	5	4
12	11	10	9	8	7	6	5
1	12	11	10	9	8	7	6
2	1	12	11	10	9	8	7
3	2	1	12	11	10	9	8

рис.2

1000 - a | a=1

8	7	6	5	4	3	2	1
9	8	7	6	5	4	3	2
1	9	8	7	6	5	4	3
2	1	9	8	7	6	5	4
3	2	1	9	8	7	6	5
4	3	2	1	9	8	7	6
5	4	3	2	1	9	8	7
6	5	4	3	2	1	9	8

рис.3

При этом для обоих случаев, количество клеток в них отличается на один, значит, в сумме нечётно. Если a=1 (например, см. рис.3 для k=9), выберем 1-ый и 2-ой цвета, количество закрашенных клеток в a×a равно 1, т.е. нечётно. Для каждого случая, сделаем *закрашенными* теперь диагонали выделенных нами двух цветов, а раскраску остальных отменим. Теперь в

каждом прямоугольнике $1\times k$ ровно 2 закрашенные клетки. Выделим слева прямоугольник 1000 строк на $(1000–a)$ столбцов и снизу справа прямоугольник $(1000–a)$ строк на a столбцов, каждый из которых разбивается на горизонтальные прямоугольники $1\times k$, т.к. $1000–a$ делится на k. В каждом прямоугольнике $1\times k$ будет по 2 закрашенные клетки, а в квадрате $a\times a$ – нечётное количество закрашенных клеток. Значит, в самом квадрате 1000×1000 в сумме будет нечётное число закрашенных клеток, но любой прямоугольник $1\times k$ содержит ровно 2 закрашенных клетки (по одной от каждого из двух выделенных цветов диагональной раскраски). Таким образом, нами приведён контрпример для любого k, не являющегося делителем числа 1000.)