XVII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».

XIV Турнир математических игр.

Игра «Домино». ***<u>Старшая лига (9-11 класс).</u>*** **<u>Решения</u>. 09.09.2021.**

0–0. В четырехугольнике *ABCD* диагонали пересекаются в точке *O*. Какие значения может принимать угол между прямыми *BC* и *AD*, если $S_{AOB}=S_{COD}$? **(<u>0°, т.к. они не пересекаются</u>. Если $S_{AOB}=S_{COD}$, то $OB\cdot OA=OC\cdot OD$, значит, треугольники *BOC* и *AOD* подобны и $BC\|AD$.)**

0–1. За какое наименьшее время часовая и минутная стрелки часов могут поменяться местами? (Т.е. минутная стрелка должна оказаться на исходном месте часовой, а часовая — на исходном месте минутной.) **(<u>12/13 часа</u>. Пусть стрелки поменялись местами через время *t*, которое очевидным образом меньше часа (часовая догонит бывшее положение минутной, а минутная пройдёт почти полный круг) и вместе они пройдут круг. Минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой, минутная пройдёт 12/13 от всего круга, т.е. *t*=12/13 часа.)**

0–2. Вася купил два одинаковых набора из 10 палочек, длины которых равны разным степеням двойки (1, 2, 4, 8, …, 2^9). Сколько разных треугольников он может составить, выбирая три палочки из них? **(<u>45</u>. Из трёх разных степеней двойки составить треугольник не удастся, т.к. при натуральных различных $a>b>c$ имеем $2^a=2\cdot 2^{a-1}\geq 2b>b+c$. Если же взять две одинаковые палочки, то с большей по длине палочкой составить треугольник не удастся, а с любой меньшей удастся. Значит, количество треугольников равно количеству способов выбрать пару разных отрезков, больший из которых надо взять дважды, т.е. это число сочетаний из 10 по 2, равное $C_{10}^2=\dfrac{10\cdot 9}{2}=45$.)**

0–3. Какое наибольшее количество фишек можно разместить на поле 100×100, чтобы среди них не нашлось двух таких фишек, когда одна стоит строго правее и строго выше другой? **(<u>199</u>, когда заняты, например, верхняя строка и правый столбец.** ***<u>Доказательство оценки 1 (принцип крайнего)</u>:*** **Рассмотрим самую правую из самых верхних фишек (рис.1). Слева от неё в одной с ней строке стоит ещё не более 99 фишек, ниже её в одном с ней столбце стоит ещё не более 99 фишек, а ниже и левее этой фишки других фишек не должно быть. Значит, у нас не более 1+2·99=199 фишек.** ***<u>Комментарий</u>: Но … в этом рассуждении допущена грубая ошибка, которая … приводит к отсутствию верного доказательства оценки:☺. Поэтому приведём всё-таки верное доказательство. <u>Доказательство оценки 2 (разбиение на части)</u>:*** **Разобьём доску на 199 диагоналей, параллельных главной диагонали из левого нижнего в правый верхний угол (рис.2), на каждой из них стоит не более 1 фишки (иначе найдутся две фишки, принадлежащие одной диагонали, – они дадут нам плохую пару фишек). Значит, всего не более 199 фишек.)**

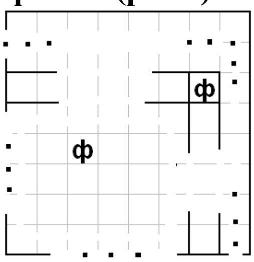


рис.1

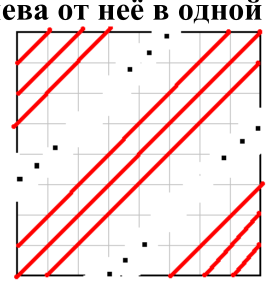


рис.2

0–4. Четвёрку гирь назовём *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди 5 гирь различного веса? *Приведите ответ и пример с обоснованием.* **(<u>2 сбалансированных четвёрки, например, гири веса 1, 2, 3, 6, 11, где 2 сбалансированные четвёрки – 1+2+3=6, 2+3+6=11</u>. Упорядочим гири по возрастанию веса: $m_1<m_2<m_3<m_4<m_5$. Рассмотрим гирю наибольшего веса m_5, заметим, что она входит во все четверки, кроме одной, которая может быть сбалансированной (из четырёх самых меньших по весу гирь – $m_1+m_2+m_3=m_4$). Рассмотрим все четвёрки, в которые входит m_5. Пусть одна из них –** ***сбалансирована*** **(иначе не более одной** ***сбалансированной*** **четвёрки), т.е. $m_i+m_j+m_k=m_5$, где $1\leq i<j<k\leq 4$. Тогда больше с гирей наибольшего веса нет** ***сбалансированных*** **четвёрок т.к. все остальные четвёрки – четверки, где одна из гирь заменена на другую, а гирь равного веса нет по условию. Значит, всего не больше двух** ***сбалансированных*** **четвёрок.)**

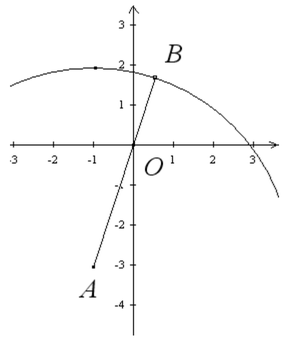
0–5. Найдите наибольшее возможное значение разности пятизначных чисел $\overline{ОСЕНЬ}-\overline{ВЕСНА}$, если $О\cdot С\cdot Е\cdot Н\cdot Ь\neq В\cdot Е\cdot С\cdot Н\cdot А$. (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*) **(<u>85407</u>. Заметим, что цифры *С, Е* и *Н* не равны 0 в силу неравенства** $О\cdot С\cdot Е\cdot Н\cdot Ь\neq В\cdot Е\cdot С\cdot Н\cdot А$.

$\overline{ОСЕНЬ}-\overline{ВЕСНА}=10000\cdot\overline{О}+900\cdot\overline{С}+\overline{Ь}-\overline{А}-900\cdot\overline{Е}-10000\cdot\overline{В}$, **тогда согласно транс-**

неравенству и с учётом отличия от нуля цифр (*B, C, E* и *H*) наибольшее значение будет приниматься при $\overline{O}=9,\ \overline{C}=8,\ \overline{Б}=7,\ \overline{A}=0, \overline{E}=2, \overline{B}=1$**, при этом *H* может принимать какое-то значение из пяти оставшихся цифр (3, 4, 5, 6), тогда** $10000\cdot\overline{O}+900\cdot\overline{C}+\overline{Б}-\overline{A}-900\cdot\overline{E}-10000\cdot\overline{B}\le 10000\cdot 9+900\cdot 8+7-0-900\cdot 2-10000\cdot 1=$ $=85407$**, т.е., например, 98237–12830=85407, что ещё и удовлетворяет условию 9·8·2·3·7≠1·2·8·3·0 (**$O\cdot C\cdot E\cdot H\cdot Б\ne B\cdot E\cdot C\cdot H\cdot A$**).)**

0–6. На столе стоит столбик из 20 монет. Все соседние монеты лежат герб к гербу, решка к решке. Разрешено брать сверху столбик из нескольких монет (возможно, все монеты), целиком его переворачивать и ставить обратно на оставшиеся монетки. За какое наименьшее число таких переворачиваний можно добиться, чтобы все монеты легли решкой в одну сторону? **(<u>19</u>. Рассмотрим пару соседних монет. Если они в столбике лежат герб к решке, назовем её «правильной» парой и «неправильной» в противном случае. Всего в столбике из 20 монет изначально 19 неправильных пар соседних монет и в конце все эти пары должны стать правильными. Но при каждом переворачивании разрывается только одна пара, поэтому при каждом переворачивании количество неправильных пар может уменьшиться не более, чем на одну, и, следовательно, требуется не менее 19 переворачиваний. Пример: переворачиваем верхнюю монету, затем переворачиваем две верхних монеты и т. д. Девятнадцатым переворотом перевернём 19 монет и получим столбик из 20 монет, лежащих решкой в одну сторону.)**

1–1. Найдите расстояние от начала координат до окружности $(x+1)^2+(y+3)^2=25$. **(**$\underline{(5-\sqrt{10}\,)}$ **– это расстояние от начала координат (точки *O*) до точки *B*, конца радиуса *AB*=5, на котором лежит точка *O*, где A(–1;–3) – центр окружности.)**



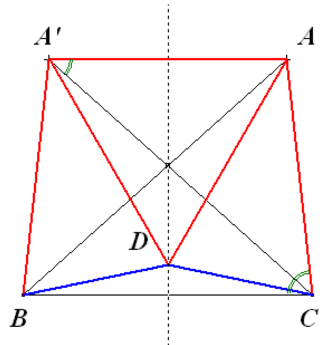
1–2. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99 и записываемое только единицами и двойками. **(<u>1122222222</u>, у которого сумма цифр равна 18, а знакочередующаяся сумма цифр равна 0, т.е. оно делится и на 9, и на 11 по признакам делимости, значит, делится и на 9·11=99, т.к. числа 9 и 11 – взаимно просты. По признакам делимости на 9 и 11 получаем, что сумма цифр *S*(*n*) нашего числа *n* делится на 9, а знакочередующаяся сумма цифр** $S_{\pm}(n)$ **делится на 11. Если найдётся число, меньшее 1122222222, то у него не более 10 цифр, значит, *S*(*n*)≤2·10=20. Тогда она либо 9, либо 18. Но ровно 9 она быть не может, т.к. в силу её нечётности получим нечётную** $S_{\pm}(n)$**, по модулю не превосходящую 9, т.е. не будет выполняться признак делимости на 11. Значит, *S*(*n*)=18. Наименьшим будет число из 9 двоек, которое не делится на 11. Следующим по величине будет число 1122222222, которое нам уже подходит, т.е. оно и будет наименьшим.)**

1–3. Число называется *палиндромом*, если оно одинаково читается как слева, так и справа (например, число 2002 — палиндром, а 2020 — нет). Сколько существует пятизначных палиндромов *x* таких, что и число 3*x* также палиндром? **(<u>48</u>. Представим наше *n*-значное число *x* в виде суммы двух палиндромов – первый *p* (*n*-значное число, назовём *примитивным*) состоит только из цифр от 0 до 3, второй *u* (назовём *избыточным*, до *n*–значного доведём приписыванием 0 в начале) состоит из 0 и цифр, получаемых из *x* вычитанием цифр примитивного палиндрома в соответствующих разрядах, например, *x*=209373902= 203333302 + 006040600 = *p*+*u*. Тогда 3*x* равен сумме палиндрома 3*p*, получающегося умножением на 3 примитивного палиндрома (т.к. переходов в следующий разряд после умножения на 3), и числа 3*u*, утроенного избыточного палиндрома. При умножении на 3 за счёт самого старшего ненулевого разряда избыточного палиндрома в числе 3*x* произойдёт переход в следующий разряд максимум 2 (т.к. имеем максимум 3·9=27), значит, в палиндроме 3*x* цифра в соответствующем разряде будет отличаться от цифры в этом разряде утроенного примитивного палиндрома, но в симметричном разряде на конце у 3*x* и 3*p* стоят одинаковые цифры. Значит, 3*x* не будет палиндромом, если избыточное для него число u не будет тождественным 0. Следовательно, наш палиндром *x* является *примитивным*, т.е. содержит только цифры 0, 1, 2 и 3. Тогда количество таких 5-значных палиндромов равно 3·4·4=48, т.к. первая цифра – 3 варианта (без нуля), вторая и третья – по 4 варианта, остальные определяются однозначно по первым двум.)**

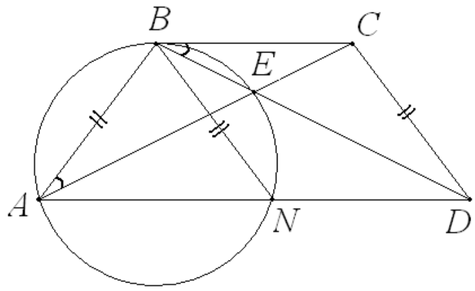
1–4. Найдите все такие действительные числа a, что для любых действительных чисел x и y верно неравенство $x^4+y^4+axy+2 \geq 0$. **(<u>$-4\leq a\leq 4$</u>. Возьмём $x=y=1$ и $x=1$, $y=-1$, тогда должны выполняться соответственно неравенства $a+4\geq 0$ и $4-a\geq 0$, откуда $-4\leq a\leq 4$. Докажем теперь, что при всех таких a неравенство $x^4+y^4+axy+2 \geq 0$ выполняется для всех действительных x и y. Имеем $x^4+y^4+axy+2 = x^4-2x^2y^2+y^4+ 2x^2y^2+ axy+2 = (x^2-y^2)^2 + 2t^2+at+2\geq 0$ – верное неравенство при $-4\leq a\leq 4$ и любом действительном $t=xy$, т.к. квадратный трехчлен $2t^2+at+2\geq 0$ в силу неположительности дискриминанта: $D=a^2-4\cdot 2\cdot 2=a^2-16\leq 0$ при $4\leq a\leq 4$.)**

1–5. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что для любых 15 натуральных чисел $a_1, a_2, ..., a_{15}$ число $a_1a_2...a_{15}(a_1^n+a_2^n+...+a_{15}^n)$ делится на 15. **(<u>4</u>. При $n\leq 3$ есть контрпример: первые 14 чисел равны 1, а 15-е равно 2, т.е. числа не кратны ни 3, ни 5. Тогда при $n=1$ у нас сумма чисел равна 16 и нет делимости всего произведения ни на 3, ни на 5. При $n=2$ у нас сумма квадратов равна 18 и нет делимости всего произведения на 5. При $n=3$ нас сумма кубов равна 22 и нет делимости всего произведения ни на 3, ни на 5. Пусть $n=4$. Если одно из чисел делится на 3 и одно из чисел делится на 5 (возможно, что одно и то же число), то общее произведение точно делится на 15. Рассмотрим случай, когда нет чисел, кратных 3 или 5. Тогда по малой теореме Ферма $(a_i^2)^2\equiv 1^2\equiv 1 \pmod 3$, $a_i^4\equiv 1 \pmod 5$, тогда $a_1^4+ a_2^4+ a_3^4+ a_4^4+\ldots+ a_{15}^4\equiv 15\equiv 0$ и по модулю 3 и по модулю 5. Значит, в этом случае на соответствующее число (3 или 5) разделится множитель-сумма 4 степеней.)**

1–6. В треугольнике ABC $\angle C = 2\angle B$. Внутри треугольника нашлась точка D такая, что $AD = AC$ и $DB = DC$. Какие значения может принимать $\angle ABD$? **(<u>30°</u>. Рассмотрим равнобочную трапецию $A'ACB$ (возможно прямоугольник, если $\angle ACB=90°$), симметричную относительно серединного перпендикуляра к BC, на котором лежит точка D (см. рис.). Пусть $\angle DBA=\alpha$, $\angle DBC=\beta$, тогда $\angle BCA=2\angle ABC=2\alpha+2\beta$, $\angle AA'C=\angle A'CB$ (накрест лежащие) $=\angle ABC$ (симметрия) $=\angle ACB/2=\alpha+\beta=\angle A'CA$, значит, треугольник $A'AC$ – равнобедренный. Тогда $A'A=AC=AD=A'D$, т.е. треугольник $A'AD$ – равносторонний. $\angle BDC=180°-2\beta$, $\angle BDA'=\angle ADC=\angle ACD=2\alpha+\beta$, откуда $360° = \angle A'DA + \angle ADC + \angle CDB + \angle BDA' = 60° + (2\alpha+\beta) + (180°-2\beta) + (2\alpha+\beta) = 240° + 4\alpha$ и $\alpha=30°$.)**



2–2. На основании AD равнобедренной трапеции $ABCD$ отмечена точка N такая, что четырёхугольник $NBCD$ является параллелограммом. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Оказалось, что точки A, B, E, N лежат на одной окружности. Какое наибольшее значение может принимать отношение AB/BC? **(<u>1</u>. $AB=CD=BN$, значит, наша окружность является описанной окружностью равнобедренного ΔABN и прямая BC будет касательной к окружности, тогда $\angle BAC=\angle BAE=\angle CBE$ (опираются на одну дугу BE), который в силу равнобедренности трапеции равен $\angle BCE=\angle BCA$. Значит, ΔABC – равнобедренный и $AB=BC$.)**



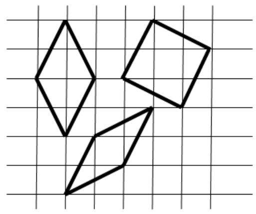
2–3. Приведите пример натурального числа n такого, что для некоторых натуральных a и b выполняется равенство $n=\dfrac{a^2-1}{2}=\dfrac{b^2-1}{3}$. *Пример обосновать.* **(<u>$n=40$, тогда $a=9$, $b=11$</u>)**

2–4. Найдите последнюю цифру перед запятой в десятичной записи числа $\dfrac{10^{190}}{10^{10}+3}$. **(<u>8</u>. Выделим целую часть нашей дроби, для этого начнём в числителе добавлять и вычитать равные числа следующим образом: $+3\cdot(10^{10})^{18}-3\cdot(10^{10})^{18}-3^2\cdot(10^{10})^{17}+3^2\cdot(10^{10})^{17}+3^3\cdot(10^{10})^{16}-\ldots+3^{17}\cdot(10^{10})^2-3^{17}\cdot(10^{10})^2-3^{18}\cdot 10^{10}+3^{18}\cdot 10^{10}+3^{19}-3^{19}$. После деления на $10^{10}+3$ получим число вида $10N+3^{18}-\dfrac{3^{19}}{10^{10}+3}$, где N – некоторое натуральное число. Значит, последняя цифра перед запятой равна $a-1$, где a – последняя цифра числа 3^{18}, которое сравнимо с $9^9\equiv(-1)^9\equiv-1\equiv 9$ (mod**

10), т.е. *a*=9. Вычитаем 1 в силу того, что вычитаемая дробь меньше 1, т.к. знаменатель больше числителя: $10^{10}+3>9^{10}=3^{20}>3^{19}$. Значит, последняя цифра перед запятой равна 8.)

2–5. В шахматном турнире принимали участие 7-классники и 8-классники, причём 7-классников было в 3 раза больше, чем 8-классников. Каждый участник турнира встречался с каждым ровно один раз. При подведении итогов турнира оказалось, что 7-классники набрали вместе на 20% очков больше, чем 8-классники. Сколько школьников могло участвовать в турнире? *За победу в шахматах даётся 1 очко, за ничью — 1/2 очка, а за поражение — 0 очков*. **(<u>12 школьников</u>. Пусть было *a* 8-классников и 3*a* 7-классников, тогда вместе они разыграли $S=C_{4a}^2=\dfrac{4a(4a-1)}{2}$ очков. При этом количество очков 7-классников равно 6*S*/11, 8-классников – 5*S*/11, и S должно делиться на 11. В партиях между собой 7-классники разыграли $C_{3a}^2=\dfrac{3a(3a-1)}{2}\le\dfrac{6S}{11}$ очков. Тогда из этого неравенства получаем, что $\dfrac{3a(3a-1)}{2}\le\dfrac{6}{11}\cdot\dfrac{4a(4a-1)}{2}\Leftrightarrow 11(3a-1)\le 8(4a-1)\Leftrightarrow a\le 3$, но только при *a*=3 сумма *S* делится на 11. При этом описываемая ситуация возможна, если все 7-классники сыграли между собой вничью и проиграли все свои партии 8-классникам, набрав вместе в сумме $C_9^2=\dfrac{9\cdot 8}{2}=36$ очков, что ровно на 20% больше очков 8-классников $C_{12}^2-C_9^2=\dfrac{12\cdot 11}{2}=36=66-36=30$.)**

2–6. Приведите пример шести различных несократимых дробей таких, что знаменатель каждой из них больше 50, но меньше 100, а знаменатель любой суммы нескольких этих дробей после сокращения становится меньше 50. *Пример обосновать.* **($\dfrac{1}{60},\dfrac{61}{60},\dfrac{121}{60},\dfrac{181}{60},\dfrac{241}{60},\dfrac{301}{60}$, где числители образуют арифметическую прогрессию с разностью $60=2^2\cdot 3\cdot 5$ и взаимно просты со знаменатлем 60, т.к. при делении на 60 имеют остаток 1. Тогда знаменатель суммы любых *N* таких дробей имеет при делении на 60 остаток *N* в пределах от 2 до 6, а сама дробь суммы станет сократимой на *N*, т.к. 60 делится на все целые числа от 2 до 6, и после сокращения знаменатель станет не больше 30, что меньше 50.)**



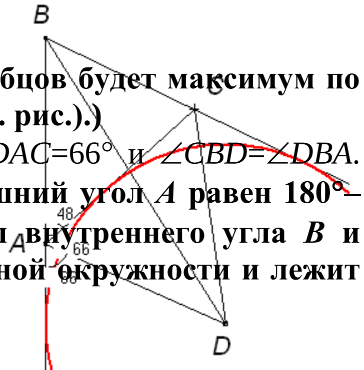
3–3. На клетчатой бумаге постройте три ромба с вершинами в узлах сетки, периметры которых равны, а площади выражаются тремя последовательными натуральными числами. **(Площади изображённых ромбов соответственно равны 3, 4, 5.)**

3–4. Девять школьников образовали несколько групп в социальной сети. В каждую группу входят ровно трое школьников, и для любых двух групп не более чем один из школьников входит в обе группы. Каково наибольшее возможное количество групп? **(<u>12</u>. Рассмотрим граф, в котором вершины – школьники, а рёбра – участие двух школьников в одном клубе. Тогда каждый клуб – это треугольник (цикл длины 3), причём треугольники не могут иметь общих сторон, т.к. для любых двух клубов не более чем один из школьников посещает их оба. Значит, всего клубов не более трети от максимального числа рёбер, т.е. не более $\dfrac{C_9^2}{3}=\dfrac{9\cdot 8}{3\cdot 2}=12$. Приведём распределение школьников по клубам в виде таблицы 9×13, где каждому школьнику соответствует строка, а клубу – столбец. Тогда для любых двух столбцов будет максимум по одной строке с обеими отмеченными клетками в этих столбцах (см. рис.).)**

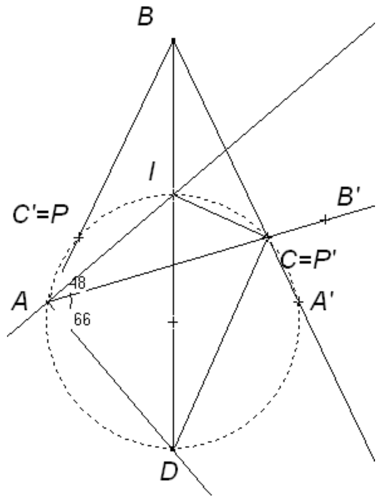
группы

школьники	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	X			X			X			X		
2	X				X			X			X	
3	X					X			X			X
4		X		X					X		X	
5		X			X		X					X
6		X				X		X		X		
7			X	X	X	X						
8			X				X	X	X			
9												

3–5. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* известно, что ∠*BAC*=48°, ∠*DAC*=66° и ∠*CBD*=∠*DBA*. Найдите ∠*BDC*. **(<u>24°</u>. <u>*Решение* 1 (вневписанная окружность)</u>: Внешний угол *A* равен 180°–48°–66°=66°, значит, точка *D* – точка пересечения биссектрисы внутреннего угла *B* и внешнего угла *A* треугольника *ABC*, значит, *D* – центр вневписанной окружности и лежит**



на биссектрисе внешнего угла *C*. Пусть ∠*B*=2β, тогда внешний угол *C* равен 48°+2β, ∠*BDC*=(48°+2β)/2–∠*DBC*=(24°+β)–β=24°. *Решение 2 (методом «идеального» построения):* Рассмотрим дельтоид *ABA’D*, в котором *BD* – ось симметрии и *C* принадлежит лучу *BA’*. Тогда биссектриса *AI* пересекает биссектрису *BD* в точке *I*, которая окажется точкой пересечения биссектрис треугольника *ABC*, а ∠*IAD*=∠*BAC*/2+∠*CAD*=24°+66°=90°. Рассмотрим окружность, построенную на отрезке *ID* как на диаметре. В силу симметрии относительно *BD* точек *C* и *C’* и того, что прямая *AB* пересекает эту окружность в такой точке *P*, что *P* и *P’* симметричны в силу равенства дуг *PI* и *IP’* получаем, что точка *P’* должна оказаться точкой пересечения *BA’*, окружности и луча *AC*, т.е. точкой *C*. Значит, точка *C* лежит на этой окружности и ∠*BDC*=∠*IDC*=∠*IAC*=∠*BAC*/2=24°. *Комментарий: Геометрия – это геометрия треугольника и окружности, поэтому всегда важно видеть окружность даже тогда, когда её нет в условии!*)



3–6. Сколько существует 18-значных чисел, в которых каждая ненулевая цифра встречается по 2 раза, и дающих максимально возможную сумму всех пятнадцати четырёхзначных чисел, составленных из четвёрок цифр, стоящих подряд? *Ответ дать числом в десятичной записи.* **(<u>7484400</u>. Пусть число $n=\overline{a_1a_2...a_{18}}$, тогда сумма 15-ти четырёхзначных чисел после представления по разрядам равна $1000a_1+1100a_2+1110a_3+1111(a_4+a_5+\ldots+a_{15})+111a_{16}+11a_{17}+a_{18}$ и тогда согласно транснеравенству наибольшая сумма будет тогда, когда к коэффициентам по убыванию будем ставить и цифры по убыванию, т.е. $a_{18}=a_{17}=1$, $a_{16}=a_1=2$, $a_2=a_3=3$, а остальные цифры уже можно ставить в любом порядке. А количество таких чисел равно количеству перестановок с повторениями, когда каждую из 6 остальных цифр повторяем по 2 раза, т.е. $P(2,2,2,2,2,2)=\dfrac{12!}{2^6}=7484400$.)**

4–4. Сколько существует натуральных $k \le 1000$, обладающих следующим свойством: если в квадрате 1000×1000 закрасить нечётное число клеток, то найдется прямоугольник со сторонами 1 и k, в котором закрашено нечётное число клеток? **(<u>16</u>. Если 1000 делится на *k*, то разобьём квадрат на прямоугольники 1×*k*, например, горизонтально. В сумме количество закрашенных клеток в них нечётно, значит, хотя бы в одном из этих прямоугольников также будет нечётное количество закрашенных клеток, что нам и требуется. Количество натуральных делителей числа 1000 равно $\tau(1000)=\tau(2^3\cdot5^3)=(3+1)\cdot(3+1)=16$. Докажем теперь, что при *k*, не являющем-**

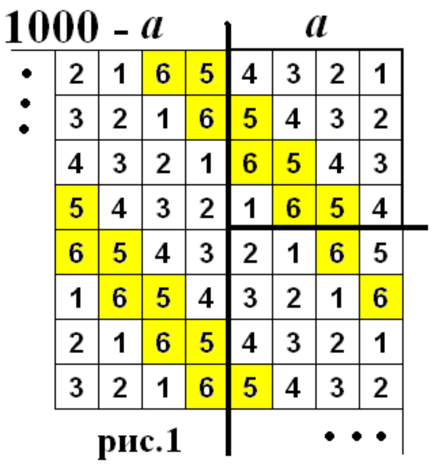


рис.1

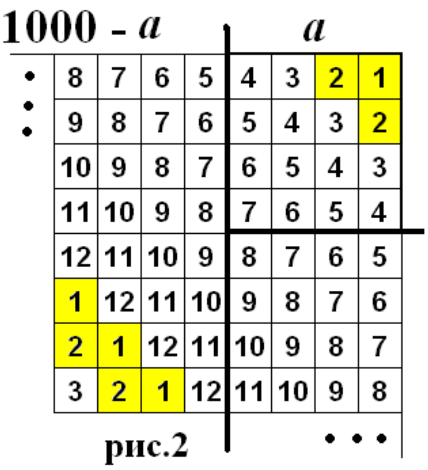


рис.2

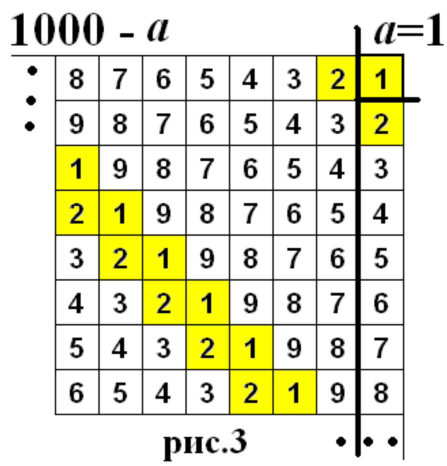
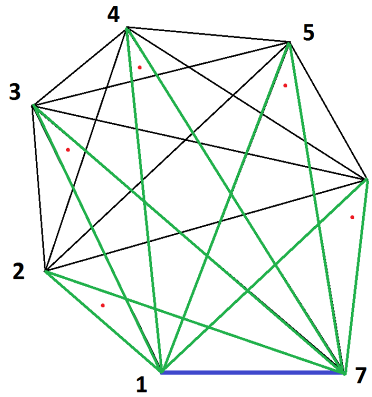


рис.3

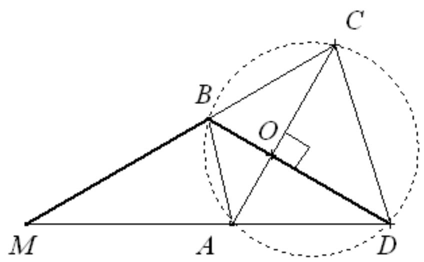
ся делителем числа 1000, существует такая раскраска с нечётным количеством закрашенных клеток, что в любом прямоугольнике 1×k будет чётное (ровно 2) количество закрашенных клеток. Применим пока диагональную раскраску в *k* цветов. В любом прямоугольнике 1×*k* каждый цвет встречается один раз. Справа сверху отрежем квадрат *a*×*a*, где *a* – остаток при делении 1000 на *k*. 1≤*a*<*k*, значит, количество диагоналей одного направления в оставшемся квадрате равно 2*a*–1≤2*k*–3. Пронумеруем цвета диагоналей, начиная с правого верхнего угла параллельно главной диагонали из левого верхнего в правый нижний угол. Если *k*≤2*a*–1, то в квадрате *a*×*a* встречаются только одна диагональ *k*-ого и *k*-1-

ого цвета (см. пример на рис.1 для *k*=6, *a*=4). Если *k*≥2*a*–1>1, то диагонали первого и второго цвета встречаются по одному разу (см. рис.2 для *k*=12, *a*=4). При этом для обоих случаев, количество клеток в них отличается на один, значит, в сумме нечётно. Если *a*=1 (например, см. рис.3 для *k*=9), выберем 1-ый и 2-ой цвета, количество закрашенных клеток в *a*×*a* равно 1, т.е. нечётно. Для каждого случая, сделаем *закрашенными* теперь диагонали выделенных нами двух цветов, а раскраску остальных отменим. Теперь в каждом прямоугольнике 1×*k* ровно 2 закрашенные клетки. Выделим слева прямоугольник 1000 строк на (1000–*a*) столбцов и снизу справа прямоугольник (1000–*a*) строк на *a* столбцов, каждый из которых разбивается на горизонтальные прямоугольники 1×*k*, т.к. 1000–*a* делится на *k*. В каждом прямоугольнике 1×*k* будет по 2 закрашенные клетки, а в квадрате *a*×*a* – нечётное количество закрашенных клеток. Значит, в самом квадрате 1000×1000 в сумме будет нечётное число закрашенных клеток, но любой прямоугольник 1×*k* содержит ровно 2 закрашенных клетки (по одной от каждого из двух выделенных цветов диагональной раскраски). Таким образом, нами приведён контрпример для любого *k*, не являющегося делителем числа 1000.)

4–5. Набор точек внутри выпуклого 2021-угольника назовём *хорошим*, если любые три вершины нашего 2021-угольника образуют треугольник, внутри которого есть точка этого набора. Какое наименьшее количество точек может содержать хороший набор? **(<u>2019</u>. Рассмотрим в общем виде произвольный выпуклый *n*-угольник. Необходимо не менее *n*–2 точек, т. к. диагонали из одной вершины разбивают *n*-угольник на *n*–2 непересекающихся треугольника. Расположим *n*–2 точек следующим образом (на примере 7-угольника – см. рис.). Выберем любую сторону (1-7, синяя). Для каждой из остальных вершин рассмотрим угол, опирающийся на эту сторону (зеленый). Поставим точку в треугольнике, отсекаемом от этого угла отрезком между соседними с ней вершинами. Тогда для любых трёх вершин *a*<*b*<*c* в треугольнике *abc* будет точка при вершине *b*: так как, если вместо *a* взять 1, то количество точек внутри треугольника *abc*, согласно нашей расстановке, не увеличится. Аналогично, можно вместо *c* взять *n* (в данном случае 7). Но по нашей расстановке внутри любого треугольника 1*bn* есть точка.)**

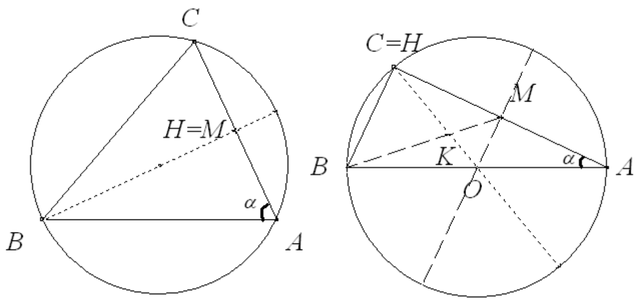


4–6. В четырёхугольнике *ABCD* диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *O* под прямым углом. При этом *DO·OB* = *AO·OC*. Лучи *DA* и *CB* пересекаются в точке *M*. Оказалось, что *DB* = *BM*. Какие значения может принимать угол *AMB*? **(<u>30°</u>. <u>*Решение 1*</u>*:* В прямоугольных треугольниках *AOD* и *BOC* выполняется отношение для катетов *DO:AO=CO:BO*. Значит, эти треугольники подобны, а ∠*ADO*=∠*BCO*, т.е. ∠*ADB*=∠*ACB*, следовательно, *ABCD* – вписанный четырёхугольник, в котором сумма дуг *AB* и *CD* равна сумме ∠*AOB*+∠*COD*=180°. Пусть α=∠*AMB*=∠*DMB*=∠*MDB* (из равнобедренности треугольника *BMD*), но ∠*BMD*=α=(∪*CD*–∪*BA*)/2=((180°–∪*BA*)–∪*BA*)/2=(180°–2∪*BA*)/2=(180°–4∠*BDA*)/2= 90°–2α, откуда α=30°. <u>*Решение 2*</u>*:* Из вписанности (см. решение 1) четырёхугольника *ABCD* следует, что ∠*ACB*=∠*ADB*=α, тогда ∠*OBC*=2α (как внешний угол треугольника *MBD*). Значит, ∠*OBC*+∠*BCO*=2α+α=90°, т.к. треугольник OBC – прямоугольный, следовательно, α=30°.)**



5–5. Треугольник *ABC* с острым углом ∠*A*=*α* вписан в окружность. Её диаметр, проходящий через основание высоты треугольника, проведённой из вершины *B*, делит треугольник *ABC* на две части одинаковой площади. Найдите угол *B*. **(<u>180°–2α или 90°–α</u>. Пусть *H* – основание высоты треугольника *ABC*, проведённой из вершины *B, M* – середина *AC* . Рассмотрим случай, когда указанный в условии диаметр пересекает сторону *AB*. Пусть *O* – точка пересечения этого диаметра со стороной *AB*. Если точка *O* совпадает с *B*, то совпадают точки *H* и *M*. Тогда треугольник *ABC* – равнобедренный, значит, ∠*B*=180°–2∠ *BAC*=180°–2*α*. Если точки *O* и *B* различны, то поскольку $S_{\Delta AMB}=S_{\Delta ABC}/2=S_{\Delta AHO}$, то отрезки *OH* и *BM* пересекаются в некоторой точке *K*. Тогда $S_{\Delta BOK}=S_{\Delta MKH}$, следовательно, $S_{\Delta BOH}=S_{\Delta BMH}$. Т.к. *BH* – общее основание равновеликих треугольников *BOH* и *BMH* , то их высоты, опущенные из вершин *O* и *M* на**

это основание, равны. Следовательно, $MO \parallel BH$. Поэтому прямая OM – серединный перпендикуляр к хорде AC. Значит, на этой прямой лежит центр окружности. Таким образом, точка O принадлежит двум различным диаметрам окружности, поэтому является её центром. Тогда $\angle B=90°-\angle A=90°-\alpha$. Если указанный в условии диаметр пересекает сторону BC, то аналогичные рассуждения дадут $\angle A=90°>\alpha$, что невозможно.)



5–6. 15 волейбольных команд разыграли турнир в один круг, причём каждая команда одержала ровно 7 побед. Сколько в этом турнире таких троек команд, которые во встречах между собой имеют по одной победе? (**<u>140 троек команд</u>. Рассмотрим любую команду *A*, остальные команды делятся на 2 группы - 7, проигравших ей, и 7, выигравших у неё. Соответственно в $7\cdot 6/2=21$ матчах между проигравшими *A* учтена 21 из $7\cdot 7=49$ побед этих команд. Значит, $49-21=28$ матчей они выиграли у команд из второй группы. Значит, команда A входит в 28 нужных нам троек. Тогда всего $15\cdot 28/3=140$ троек, т.к. каждая тройка подсчитана 3 раза.**)

6–6. Пусть $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = x_n + \left[\frac{x_n}{n}\right] + 2$ для натуральных $n \geq 1$. Найдите x_{2021}. (**<u>24115</u>. Докажем по индукции, что если $n=2^k+r$, где $0\leq r<2^k$, то $x_n=(k+1)n+2r$. При $n=1$ утверждение верно. Предположим, что оно верно при некотором n. Докажем, что тогда оно верно и для $n+1$. Заметим, что $2r<n$. Поэтому $x_{n+1}=x_n+(k+1)+2=(k+1)(n+1)+2(r+1)$. Если $r<2^k-1$, то $n+1=2^k+(r+1)$ и всё доказано. Если же $r=2^k-1$, то $n+1=2^{k+1}$, а $x_{n+1}=(k+1)\cdot 2^{k+1}+2\cdot 2^k=(k+2)\cdot 2^{k+1}=(k+2)(n+1)$ – утверждение снова выполняется. В нашем случае $n=2021=2^{10}+997$, следовательно, $x_{2021}=(10+1)\cdot 2011+2\cdot 997=24115$.)**