XVII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».

XIV Турнир математических игр.

Математическая игра «Дуэль».

<u>Младшая лига (7-8 классы).</u> **<u>Решения</u>**. ***10 сентября 2021 года.***

1. В лагерь приехали 50 девочек и 51 мальчик, один из которых — Вася. Оказалось, что все девочки знакомы с одним и тем же количеством мальчиков, а все мальчики (но не Вася), знакомы с одним и тем же количеством девочек. Сколько у Васи могло быть знакомых девочек? **(<u>0 или 50</u>. Пусть каждый мальчик (но не Вася) знаком с d девочками, Вася – с b девочками, каждая девочка – с m мальчиками. Тогда количество знакомств равно $50d+b=50m$, т.к. каждое знакомство посчитано по одному разу со стороны мальчиков и девочек. Тогда $b=50(m–d)$ делится на 50 и не больше 50, значит, b равно 0 или 50. И обе ситуации могли быть, когда Вася знаком с каждой девочкой (50 знакомств) или же незнаком, а остальные мальчики с девочками незнакомы.)**

2. «Хромой» шахматный конь чередует обычные ходы и «короткие», при которых он перемещается на соседнюю по диагонали клетку. Он начинает движение по доске 5×6 с обычного хода (и сам выбирает начальную клетку). Какое наибольшее число ходов он может сделать, не посещая ни одну клетку, в том числе, и начальную, больше одного раза? *Приведите ответ и пример.* **(<u>25</u>. Раскрасим доску полосатой раскраской в 2 цвета, как показано на рисунке 1. Заметим, что за любые два подряд идущих хода (первый ход – обычный, второй – диагональный) конь посетит чёрную клетку (ведь диагональгный ход меняет цвет клетки). А поскольку чёрных клеток всего 12, то конь может сделать не более 25=2·12+1 ходов (последним обычным ходом конь ещё может встать на белую клетку). Пример обхода доски за 25 ходов – см.рис.2.)**

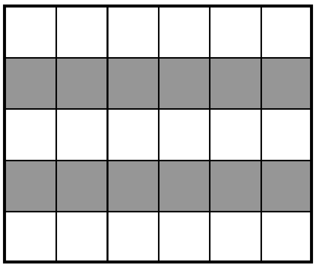
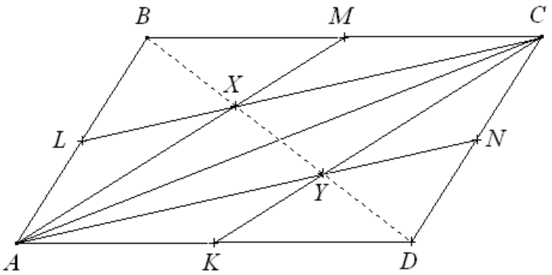


рис.1

10	8	6	4	2	
17	11	9	7	5	3
19	16	14	21		1
12	18	20	15	25	23
	13	26	24	22	

рис.2

3. В параллелограмме отрезки, соединяющие вершину одного из его углов с серединами несмежных с ним сторон, делят этот угол на три равные части. Какие значения может принимать этот угол? **(<u>Никакие. Условие задачи некорректно: данные отрезки НЕ МОГУТ делить угол на 3 равные части</u>. Предположим, что это возможно. Пусть L, M, N, K – соответственно середины сторон AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$. Пусть X и Y – точки пересечения медиан в треугольниках ABC и ACD. Тогда $BX=XY=YD$. Пусть отрезки AM и AN делят угол A на 3 равные части. Тогда AX – медиана и биссектриса треугольника ABY, т. е. $AX\perp BD$, AY – медиана и биссектриса треугольника ADX, т. е. $AY\perp BD$. Тогда из точки A опущено два различных перпендикуляра на прямую BD. Противоречие.)**

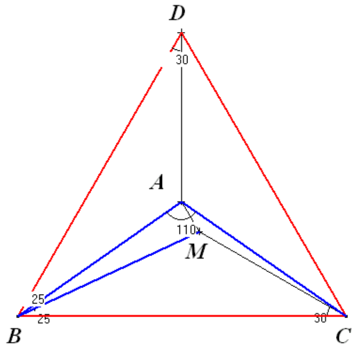


4. Найдите какое-нибудь 50-значное число без нулей в десятичной записи, которое делится на сумму квадратов своих цифр. Ответ обосновать. **(Например, 50-значное число 711111…1<u>125</u> делится на $125=5^3$ согласно признаку делимости на степень пятёрки. Сумма квадратов его цифр действительно равна $125=7^2+47\cdot1^2+2^2+5^2$. *<u>Комментарий</u>: Можно было бы попробовать подобрать число, кратное степени двойки, например, кратное 128 или 256.*)**

5. Приведите пример пяти пар двузначных чисел m и n, для которых число $(m+n–1)(m+n)$ делится на mn. *Ответ обоснуйте.* **(Пусть $m=(2a+1)a$, $n=(2a+1)(a+1)$, где a – натуральное число. Тогда $(m+n–1)(m+n) = ((2a+1)^2–1)(2a+1)^2 = (2a+1–1)(2a+1+1)(2a+1)^2=4a(a+1)(2a+1)^2=4mn$ делится на mn. Тогда нам подойдут, например, пары <u>(10,15), (21,28), (36,45), (55,66), (78,91) при a, равном 2, 3, 4, 5 и 6</u>.)**

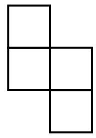
6. Вершины тысячеугольника занумерованы всеми натуральными числами от 1 до 1000. Начиная с первой, отмечается каждая пятнадцатая вершина (1, 16, 31 и т.д.). Вершины отмечаются до тех пор, пока не начнут повторяться. Сколько вершин останутся неотмеченными? **(<u>800 вершин</u>. Отметка точек прекращается, когда одна из вершин будет отмечена во второй раз, а это будет первая**

вершина. Номера отмечаемых вершин – это члены арифметической прогрессии с разностью 15, т. е. числа вида 1+15*k* . Если после нескольких полных оборотов (например, *m* оборотов) снова будет отмечена первая вершина, то можем записать: 1=1+15*k*–1000*m* , где *k* – число отмеченных вершин. Это уравнение перепишем в виде 3*k*=200*m* . Отсюда видно, что *k*=200*, m*=3, т. е. после трёх оборотов первая вершина будет отмечена во второй раз. Следовательно, всего будет отмечено 200 вершин, а остальные останутся неотмеченными.)

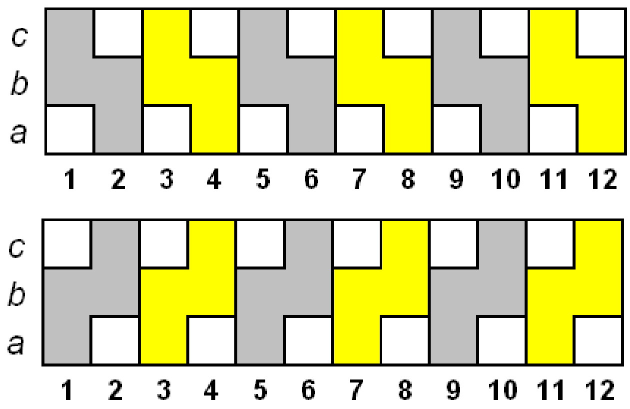


7. Внутри равнобедренного треугольника *ABC* с углом *A*, равным 110°, отмечена точка *M*. Оказалось, что $\angle BCM = 30°$ и $\angle CBM = 25°$. Найдите угол *AMB*. (**<u>85°</u>. Точка *A* не может лежать на основании, так как углы (по 35°) при основании острые. Построим равносторонний треугольник *CDB* с точкой *A* внутри. Тогда ∠*ABD* = 60° – 35° = 25°. ∠*ADB* = 60°/2 = 30° (так как *DA* – биссектриса). Получаем, что треугольники *CMB* и *BAD* равны, откуда *BM*=*BA*. Следовательно, в равнобедренном треугольнике *ABM* ∠*AMB* = (180°–∠*ABM*)/2 = 85°.)**

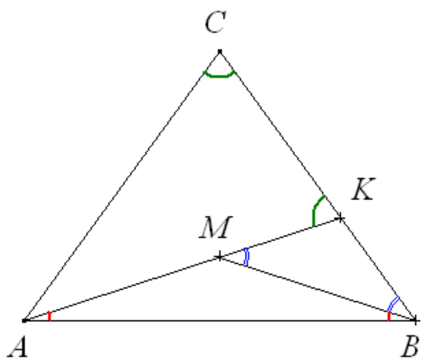
8. В таблице 3 строки и 12 столбцов. В ней расставлены числа. Известно, что сумма чисел в таблице равна 10, а сумма чисел в каждой фигурке вида, показанного на рисунке, равна 1 (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Чему равна сумма чисел во второй строке таблицы?



(**<u>2</u>. Двумя разными способами (см. рис.) выделим в таблице по 6 наших фигур, в которых сумма чисел будет по 6. Тогда заметим, что 2·6=12=*A*+2*B*+*C,* где *A, B, C* – суммы чисел в строках *a, b* и *c* соответственно, т.к. каждое число из строки *b* посчитано 2 раза, а из двух других строк – по разу. Но *A*+*B*+*C*=10 – сумма чисел всей таблицы, значит, *B*=12–(*A*+*B*+*C*)=12–10=2. И такое действительно могло быть, если во всех клетках второй строки числа равны 1/6, а во всех клетках первой и третьей строк – по 1/3, тогда в каждой фигурке сумма равна 2(1/3+1/6)=1, во всей таблице 12·(2/3+1/6)=10, что нам и требуется.)**



9. На стороне *BC* равнобедренного треугольника *ABC* с целочисленными (в градусах) углами отмечена точка *K*, а на отрезке *AK* отмечена точка *M* так, что *AM*=*MB*, *MK*=*KB*, *AK*=*AC*. Найдите угол *A* треугольника *ABC*. (**<u>54°</u>. Пусть ∠*MAB*=∠*MBA*=α (в силу равнобедренности *AM*=*MB*), тогда ∠*BMK*=2α – внешний для треугольника *AMB*, ∠*MBK*=∠*BMK*=2α (в силу равнобедренности *MK*=*KB*), ∠*AKC*=4α – внешний для треугольника *BMK*, ∠*ACK*=∠*AKC*=4α (в силу равнобедренности). ∠*ABC*=3α≠∠*ACB*=4α, значит, возможны два варианта равнобедренности исходного треугольника. 1) ∠*BAC*=∠*ACB*=4α, значит, сумма углов треугольника 180°=3α+4α+4α=11α, откуда α=180°/11, углы 3α и 4α не являются целочисленными. 2) ∠*BAC*=∠*ABC*=3α, значит, сумма углов треугольника 180°=3α+3α+4α=10α, откуда α=180°/10=18°, ∠*A*=3α=3·18°=54°.)**



10. На столе стоят 50 одинаковых с виду гирь, по одной гире весом 51 г, 52 г, 53 г, …, 100 г. Также есть неточные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть по одной гире. Весы покажут, какая гиря тяжелее, но только если разность весов этих гирь превышает *k* граммов, иначе весы покажут равенство. При каком наибольшем натуральном *k* с помощью таких весов можно с гарантией узнать, сколько весит каждая из гирь на столе? (**<u>24</u>. При *k*≥25 мы никогда не сможем распознать между собой гири 75г и 76г, т.к. каждая из них с любой другой гирей всегда показывает равенство, значит, *k*≤24. При *k*=24 взвесим каждую гирю с каждой и запишем для неё пару чисел (*a*, *b*), где *a* и *b* – количество пар, в которых показан меньший и больший вес этой**

гири соответственно. Тогда мы распознаем все гири, т.к. им соответствуют разные пары чисел: 51г→(25,0), 52г →(24,0), …, 75г→(1,0), 76г→(0,1), 77г→(0,2), …, 100г→(0,25).)

11. Вася задумал натуральное число, не большее 2^{20}, все простые делители которого не превосходят тройки. Петя пытается узнать это число. Для этого он одновременно называет *k* натуральных чисел, а Вася называет в ответ те из них, которые делятся на задуманное им число. При каком наименьшем *k* Петя сможет подобрать такие *k* чисел, что по полученному ответу заведомо определит задуманное Васей число? **(<u>20</u>. Пусть Петя назовёт числа 2^{19}, $2^{18}\cdot 3\cdot$, $2^{17}\cdot 3^{2}\cdot$, …, 3^{19}, т.е. сумма степеней у обоих простых множителей равна 19. Заметим, что у Васи, кроме случая 2^{20}, число имеет вид $2^m\cdot 3^n$, где $m+n\le 19$, т.к. $2^{m+n}\le 2^m\cdot 3^n<2^{20}$. Тогда Вася первый раз скажет «да» на Петином числе, где степень тройки равна *n*, а последний раз скажет «да» на числе, где степень двойки равна *m*. Тем самым мы узнаем и *n*, и *m*, значит, и само Васино число. Если же Вася ни разу не сказал «да», то у него число 2^{20}. Покажем теперь, что $k\ge 20$. Если Петя назовёт не более 19 чисел, то мы не можем гарантированно распознать числа 2^m и 2^{m+1}, т.к. среди 19 Петиных чисел найдётся число, содержащее 2^m, но нет числа, содержащего 2^{m+1}, где $m\le 18$ (всего вариантов степени двойки – 21). Тем самым по Васиным ответам «да» мы узнаем, что степень двойки будет не меньше *m*, а по ответам «нет», что степень двойки будет не больше $m+2$, а саму её так и не узнаем.)**

12. В музее современного искусства размещено 200 шедевров абстрактной живописи. Изучив эти шедевры, искусствовед установил, что для рисования всех этих картин вместе использовано *k* цветов и наборы цветов у любых двух картин различны. Оказалось, что нет цвета, присутствующего на всех картинах, но для любых двух картин найдется общий цвет. При каком наименьшем *k* такое возможно? **(<u>9</u>. Пронумеруем цвета числами от 1 до *k*. Закодируем двоичным *k*-значным кодом каждую картину, где 1 в соответствующем разряде означает, что данный цвет присутствует в картине, 0 – нет. У всех картин разные коды, т.к. наборы цветов у картин различны. Если цветов не более 7, то кодов не более $2^7=128<200$ – противоречие. Если цветов 8, то кодов – $2^8=256$. Разобьём все их на пары дополняющих друг друга до полного кода из 8 единиц: 10000000↔01111111, 11000000↔001111111 и т.д. (где у одного 1, у другого – 0, и наоборот). Всего таких пар 128, значит, найдутся коды из одной пары, но они не пересекаются, следовательно, соответствующие им картины не имеют общего цвета, – противоречие. Значит, цветов не менее 9. Для 9 цветов в качестве примера возьмём 200 из всех кодов, содержащих 5 или 6 единиц. Количество таких кодов равно** $C_9^5+C_9^6=C_{10}^6=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210>200$**,**

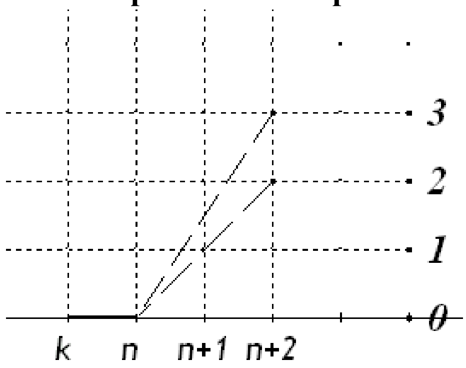
т.е. их хватает на 200 картин. При этом любые две картины в сумме содержат не менее 10 цветов из 9 имеющихся, т.е. у них обязательно есть общий цвет. При этом у них у всех вместе нет общего цвета, т.к. иначе количество таких картин-кодов было бы не больше

$C_8^4+C_8^5=C_9^5=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=126<200$**.)**

13. В произведении пятизначных чисел $\overline{НОВЫЙ}\times\overline{ОБМАН}$ разные буквы обозначают разные цифры, одинаковые буквы – одинаковые цифры. На какую наибольшую степень двойки может делиться данное числовое выражение? *Приведите ответ и пример с разложением на простые множители.* **(<u>29, например, 49152×98304=($2^{14}\cdot 3$)×($2^{15}\cdot 3$)</u>. Наибольшая степень двойки, на которую делится пятизначное число, – 2^{16}=65536, но она не подходит, так как есть одинаковые цифры. Далее идут числа, кратные 2^{15} – 32768 и 98304. Одновременно мы их использовать не можем (буквы в словах «новый и обман» повторяются определённым образом), поэтому используем число, кратное 2^{14}, и строим пример.)**

14. Какое наибольшее количество вершин может быть у выпуклого многоугольника, если известно, что у каждой вершины обе координаты — целые числа от 0 до 4? *Приведите ответ и пример.* **(<u>9</u>, см. пример на рис. Всего существует 5 вертикальных и 5 горизонтальных линий сетки (соответственно с абсциссами и ординатами 0, 1, 2, 3, 4), на каждой из которых будет не более двух вершин выпуклого многоугольника, т.к. такая линия либо мо-**

жет пересекать контур максимум в двух точках, либо содержит целиком всю сторону (значит, и 2 вершины). Тогда у многоугольника не более 5·2=10 вершин. Предположим, что существует многоугольник с 10 вершинами, тогда на каждой такой линии ровно по 2 вершины. Рассмотрим две вершины на нижней линии (с ординатой 0), их абсциссы (*k* < *n*) отличаются ровно на 1, иначе с промежуточной абсциссой (*n*–1) будет максимум 1 вершина (сверху), а должно быть 2. По принципу Дирихле из 3 оставшихся абсцисс (кроме *k*=*n*–1 и *n*) хотя бы 2 будут с одной стороны (не умаляя общности, будем считать, что справа – см. рис.). Тогда на вертикальных линиях с абсциссами *n*+1 и *n*+2 должны быть нижние вершины, но мы не можем каждый раз по вертикали сдвинуться ровно на 1, иначе у нас будут сразу 3 вершины (*n*, 0), (*n*+1, 1), (*n*+2, 2), лежащие на одной прямой. Значит, на участке от вершины (*n*, 0) до (*n*+2, *m*), где *m*≥3 не будет правой вершины либо с ординатой 1, либо с ординатой 2. Противоречие. Значит, ровно 10 вершин у нашего многоугольника быть не может, следовательно, вершин – не более 9, что и требовалось доказать.)



15. Про натуральное число *n* известно, что сумма какого-то натурального делителя числа 3*n*+1 и какого-то натурального делителя числа *n*+1 равна 2*n*. Чему может быть равно *n*? **(<u>1, 2, 3, 5</u>. Пусть *a* – делитель числа 3*n*+1, меньший 2*n*, т.е. не превосходящий (3*n*+1)/2; *b* – делитель числа *n*+1. Разберём несколько случаев. <u>*1 случай*</u>. *b*=*n*+1, тогда *a*=2*n*–(*n*+1)=*n*–1, значит, целое число $\frac{3n+1}{n-1}=\frac{3n-3+4}{n-1}=3+\frac{4}{n-1}$ даёт нам (*n*–1) – делитель числа 4, откуда *n* равно 2, 3 или 5, для каждого из которых есть нужная пара делителей: 1+3=4, 2+4=6, 4+6=10. <u>*2 случай*</u>. *b*=(*n*+1)/2, тогда *n* – нечётное число и *a*=2*n*–(*n*+1)/2=(3*n*–1)/2, значит, целое число $\frac{3n+1}{(3n-1)/2}=\frac{6n+2}{3n-1}=\frac{6n-2+4}{3n-1}=2+\frac{4}{3n-1}$ даёт нам (3*n*–1) – делитель числа 4, откуда *n*=1 и есть нужная пара делителей 1+1=2. <u>*3 случай*</u>. *b*≤(*n*+1)/3, тогда (3*n*+1)/2≥*a*≥2*n*–(*n*+1)/3=(5*n*–1)/3 ⇔ 9*n*+3≥10*n*–2 ⇔ *n*≤5, но случаи 1, 2, 3 и 5 нам уже подходят. Значит, осталось разобрать только *n*=4. Тогда *b*=1 – делитель числа *n*+1=5, *a*=2·4–*b*=7 – делитель числа 3*n*+1=13 – противоречие. Значит, других подходящих *n*, кроме 1, 2, 3 и 5, – нет.)**

16. Расставьте в клетках таблицы 4×4 по одному все целые числа от 1 до 16 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел была простым числом. *В примере также указать сумму в каждом ряду.* **(Например, поступим следующим образом. Разобьём сначала наши числа на пары, дающие в сумме 17, и расставим эти пары так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма была равна 34=2·17, записывая половину пар с меньшего числа, а половину – с большего. После этого (см. рис.) переставим числа 2 и 5, 4 и 7, стоящие в четырёх разных строках и столбцах. Тогда в каждом ряду сумма изменится на 3 и станет равной либо 31, либо 37, а это простые числа.)**

1	16	5	12	34
15	2	11	6	34
14	3	10	7	34
4	13	8	9	34
34	34	34	34	

→

1	16	2	12	31
15	5	11	6	37
14	3	10	4	31
7	13	8	9	37
37	37	31	31	