XVII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XIV Турнир математических игр. Математическая игра «Дуэль».
<u>Старшая лига (9-11 классы).</u> **<u>Решения</u>.** ***10 сентября 2021 года.***

1. В вершинах куба расставили числа $1^2, 2^2, \ldots, 8^2$ (в каждую из вершин – по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений. **(<u>9420</u>. Раскрасим вершины куба в шахматном порядке, чтобы концы каждого ребра были разноцветными. Пусть в вершинах одного цвета стоят числа a_1, a_2, a_3, a_4, а в вершинах другого – числа b_1, b_2, b_3, b_4, причём числа с одинаковыми номерами стоят в противоположных вершинах. Тогда, как легко проверить, указанная в условии сумма произведений будет равна $(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4) – (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)$. По неравенству Коши $(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4) \leq (a_1+a_2+a_3+a_4+b_1+b_2+b_3+b_4)^2/4 = (1^2+2^2+\ldots+8^2)^2/4 = 10404$, причём равенство достигается только при $a_1+a_2+a_3+a_4 = b_1+b_2+b_3+b_4$ (1). С другой стороны, сумма $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$, где a_i и b_i – числа $1^2, 2^2, \ldots, 8^2$, минимальна тогда, когда 8^2 умножается на 1^2, 7^2 – на 2^2, 6^2 – на 3^2, 5^2 – на 4^2 (2). В самом деле, пусть 8^2 умножается на $a^2 \neq 1^2$, а 1^2 – на b^2. Понятно, что умножив 8^2 на 1^2, а a^2 – на b^2, мы уменьшим сумму $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$. Затем аналогично показываем, что мы уменьшим сумму, умножив 7^2 на 2^2, и т.д. Как ни удивительно, можно добиться *одновременного* выполнения условия максимальности (1) и условия минимальности (2): для этого надо в вершины одного цвета поставить числа 1^2, 4^2, 6^2 и 7^2, а в вершины другого – остальные таким образом, чтобы 8^2 и 1^2, 7^2 и 2^2, 6^2 и 3^2, 5^2 и 4^2 стояли в противоположных вершинах. Понятно, что такая расстановка и даст искомый максимум сумм произведений, равный $(1^2+4^2+6^2+7^2)^2–(8^2\cdot1^2+7^2\cdot2^2+6^2\cdot3^2+5^2\cdot4^2) = 102^2–984 = 9420$. Заметим, что числа $1^2, 2^2, \ldots, 8^2$ можно разбить на две группы по 4 числа с равными суммами чисел, т.к. $(n+1)^2–n^2 = 2n+1$ и $((n+3)^2–(n+2)^2)–((n+1)^2–n^2) = (2n+5)–(2n+1) = 4$ при любом n. В результате получим, что $(1^2–2^2–3^2+4^2)–(5^2–6^2–7^2+8^2) = 1^2–2^2–3^2+4^2–5^2+6^2+7^2–8^2 = 4–4 = 0$.)**

2. «Хромой» шахматный конь чередует обычные ходы и «короткие», при которых он перемещается на соседнюю по диагонали клетку. Он начинает движение по доске 5×6 с обычного хода (и сам выбирает начальную клетку). Какое наибольшее число ходов он может сделать, не посещая ни одну клетку, в том числе, и начальную, больше одного раза? *Приведите ответ и пример.* **(<u>25</u>. Раскрасим доску полосатой раскраской в 2 цвета, как показано на рисунке 1. Заметим, что за любые два подряд идущих хода (первый ход – обычный, второй – диагональный) конь посетит чёрную клетку (ведь диагональгный ход меняет цвет клетки). А поскольку чёрных клеток всего 12, то конь может сделать не более 25=2·12+1 ходов (последним обычным ходом конь ещё может встать на белую клетку). Пример обхода доски за 25 ходов – см.рис.2.)**

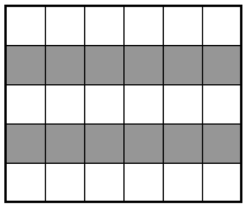
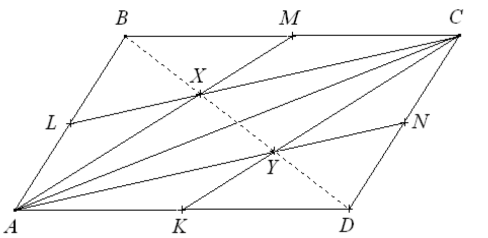


рис.1

10	8	6	4	2	
17	11	9	7	5	3
19	16	14	21		1
12	18	20	15	25	23
	13	26	24	22	

рис.2

3. В параллелограмме отрезки, соединяющие вершину одного из его углов с серединами несмежных с ним сторон, делят этот угол на три равные части. Какие значения может принимать этот угол? **(<u>Никакие. Условие задачи некорректно: данные отрезки НЕ МОГУТ делить угол на 3 равные части</u>. Предположим, что это возможно. Пусть *L, M, N, K* – соответственно середины сторон *AB, BC, CD* и *AD* параллелограмма *ABCD*. Пусть *X* и *Y* – точки пересечения медиан в треугольниках *ABC* и *ACD*. Тогда *BX=XY=YD*. Пусть отрезки *AM* и *AN* делят угол *A* на 3 равные части. Тогда *AX* – медиана и биссектриса треугольника *ABY*, т. е. $AX \perp BD$, *AY* – медиана и биссектриса треугольника *ADX*, т. е. $AY \perp BD$. Тогда из точки *A* опущено два различных перпендикуляра на прямую *BD*. Противоречие.)**



4. Найдите все возможные действительные *t*, для которых существуют действительные *x*, *y* и *z* такие, что $xy+yz+zx=1$ и $\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=\frac{t}{x+y+z-xyz}$. **(<u>2</u>. Заметим, что $x+y+z–xyz= x(xy+yz+zx)+y+z–xyz=(x^2+1)(y+z)=$ (аналогично) $= (y^2+1)(z+x) = (z^2+1)(x+y)$. Выразим *t* из второго равенства, домножив левую сумму на знаменатель правой дроби, после чего при раскрытии скобок у каждой дроби будем его заменять одним из трёх полученных выше выражений**

со множителем, аналогичным знаменателю дроби, т.е.

$$t=\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}\right)(x+y+z-xyz)=$$

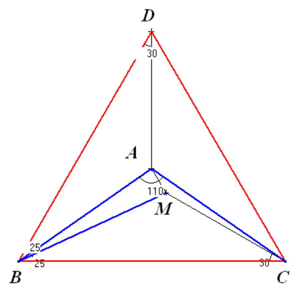
$$\frac{x(x^2+1)(y+z)}{x^2+1}+\frac{y(y^2+1)(z+x)}{y^2+1}+\frac{z(z^2+1)(x+y)}{z^2+1}=(xy+zx)+(yz+xy)+(zx+yz)=2.$$ **Значит, t=2.**

Причём при t=2 существуют удовлетворяющие условию числа x, y, z, например, когда все они равны $\frac{1}{\sqrt{3}}$ или x=y=1, z=0.)

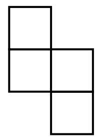
5. Приведите пример пяти пар двузначных чисел m и n, для которых число (m+n–1)(m+n) делится на mn. *Ответ обоснуйте.* **(Пусть m=(2a+1)a, n=(2a+1)(a+1), где a – натуральное число. Тогда (m+n–1)(m+n) = ((2a+1)^2–1)(2a+1)^2 = (2a+1–1)(2a+1+1)(2a+1)^2=4a(a+1)(2a+1)^2=4mn делится на mn. Тогда нам подойдут, например, пары <u>(10,15), (21,28), (36,45), (55,66), (78,91) при a, равном 2, 3, 4, 5 и 6</u>.)**

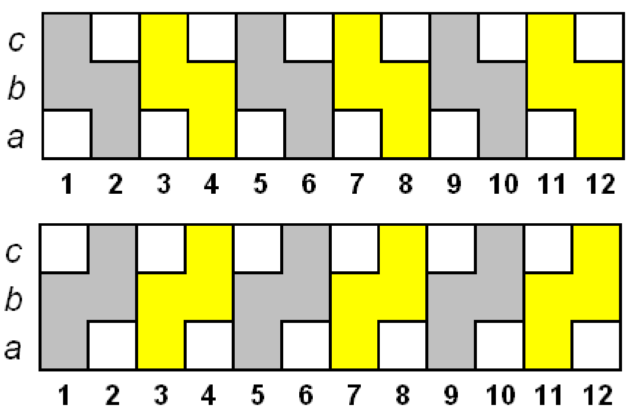
6. Найдите все натуральные n, у которых существует такой положительный делитель d, что число n^2+7d является точным квадратом. **(<u>3 и 9</u>. n=ad, где a и d – оба являются натуральными делителями n. Возможны 2 случая – d делится и не делится на простое число 7. <u>*1-й случай*</u>. Если d делится на 7, то d=7b, где b – натуральное число, тогда k^2 = n^2+7d = (ad)^2+7d = d(a^2d+7) = 7b(a^2·7b+7) = 7^2·b(a^2b+1), где b и a^2b+1 – взаимно просты, которые в произведении вместе с 7^2 дают точный квадрат. Значит, оба эти числа – точные квадраты (b=c^2, a^2b+1= a^2c^2+1=e^2, что невозможно, т.к. квадраты натуральных чисел (ac и e) не могут отличаться ровно на 1. <u>*2-й случай*</u>. Если d не делится на 7, тогда n^2+7d=(ad)^2+7d=d(a^2d+7), где d и a^2d+7 – взаимно просты. Значит, оба эти числа – точные квадраты (d=c^2, a^2d+1= a^2c^2+7=e^2), что возможно только при ac=3, e=4 (e^2–(ac)^2=(e–ac)(e+ac)=7=1·7, откуда e–ac=1, e+ac=7 в силу натуральности обоих чисел e>ac). Тогда или c=1, a=3, d=c^2=1, n=ad=3, или c=3, a=1, d=c^2=9, n=ad=9.)**

7. Внутри равнобедренного треугольника ABC с углом A, равным 110°, отмечена точка M. Оказалось, что ∠BCM = 30° и ∠CBM = 25°. Найдите угол AMB. **(<u>85°</u>. Точка A не может лежать на основании, так как углы (по 35°) при основании острые. Построим равносторонний треугольник CDB с точкой A внутри. Тогда ∠ABD = 60° – 35° = 25°. ∠ADB = 60°/2 = 30° (так как DA – биссектриса). Получаем, что треугольники CMB и BAD равны, откуда BM=BA. Следовательно, в равнобедренном треугольнике ABM ∠AMB = (180°–∠ABM)/2 = 85°.)**

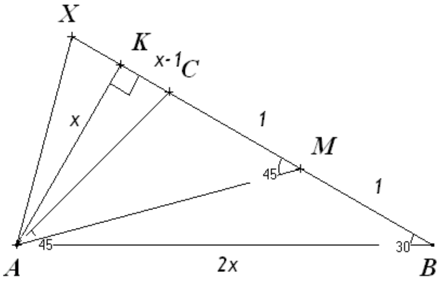


8. В таблице 3 строки и 12 столбцов. В ней расставлены числа. Известно, что сумма чисел в таблице равна 10, а сумма чисел в каждой фигурке вида, показанного на рисунке, равна 1 (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Чему равна сумма чисел во второй строке таблицы? **(<u>2</u>. Двумя разными способами (см. рис.) выделим в таблице по 6 наших фигур, в которых сумма чисел будет по 6. Тогда заметим, что 2·6=12=A+2B+C, где A, B, C – суммы чисел в строках a, b и c соответственно, т.к. каждое число из строки b посчитано 2 раза, а из двух других строк – по разу. Но A+B+C=10 – сумма чисел всей таблицы, значит, B=12–(A+B+C)=12–10=2. И такое действительно могло быть, если во всех клетках второй строки числа равны 1/6, а во всех клетках первой и третьей строк – по 1/3, тогда в каждой фигурке сумма равна 2(1/3+1/6)=1, во всей таблице 12·(2/3+1/6)=10, что нам и требуется.)**



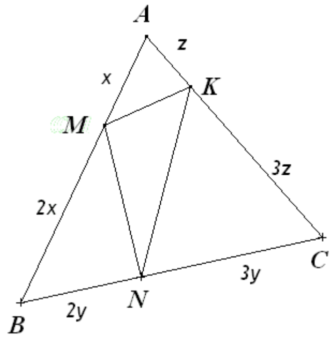


9. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC=2, ∠C = 90°+∠B/2, ∠AMC = 45°. Найдите AB. **(<u>$\sqrt{3}+1$</u>. Пусть AK — высота треугольника ABC, а точка X симметрична точке C относительно точки K. Тогда ∠BXA = ∠ACX = 90°–∠B/2. Тогда ∠BAX = 180°–∠B–∠BXA = 90°–∠B/2, откуда AB = BX. Кроме того, треугольник AKM — прямоугольный равнобедренный, откуда**



$AK = KM = BX/2 = AB/2$. Следовательно, $\angle B = 30°$, $AK=x$, $AB=2x$, $KB=x+1$ и по теореме Пифагора для треугольника AKB находим, что $x = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.)

10. Во всех боковых гранях треугольной пирамиды $ABCS$ проведены биссектрисы из вершины S. Во сколько раз площадь треугольника из оснований биссектрис меньше площади самого основания ABC, если известно, что $SA=1$, $SB=2$, $SC=3$? (**5. В силу свойств биссектрисы основания биссектрис делят сторону в отношении боковых сторон треугольника, т.е. $AM:BM=SA:SB=1:2$, $BN:CN=SB:SC=2:3$, $CK:AK=SC:SA=3:1$ (см. рис.). Тогда площади треугольников AMK, BNM и CKN составляют соответственно $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$ и $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{20}$ от площади треугольника ABC, а вместе $\frac{1}{12}+\frac{4}{15}+\frac{9}{20}=\frac{5+16+27}{60}=\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$ его площади, значит, площадь треугольника MNK в 5 раз меньше площади треугольника ABC.)**

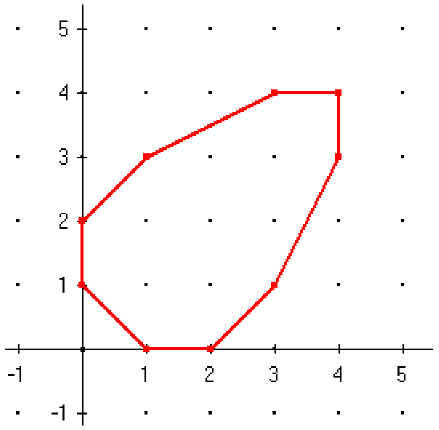


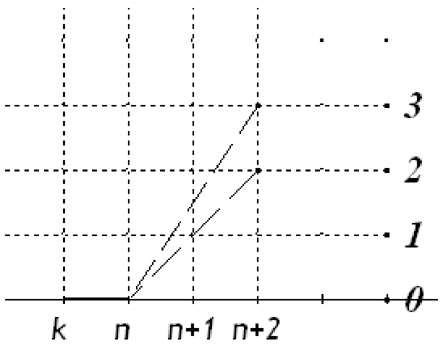
11. Вася задумал натуральное число, не большее 2^{20}, все простые делители которого не превосходят тройки. Петя пытается узнать это число. Для этого он одновременно называет k натуральных чисел, а Вася называет в ответ те из них, которые делятся на задуманное им число. При каком наименьшем k Петя сможет подобрать такие k чисел, что по полученному ответу заведомо определит задуманное Васей число? (**20. Пусть Петя назовёт числа 2^{19}, $2^{18}\cdot3\cdot$, $2^{17}\cdot3^{2}\cdot$, …, 3^{19}, т.е. сумма степеней у обоих простых множителей равна 19. Заметим, что у Васи, кроме случая 2^{20}, число имеет вид $2^m\cdot3^n$, где $m+n\le19$, т.к. $2^{m+n}\le2^m\cdot3^n<2^{20}$. Тогда Вася первый раз скажет «да» на Петином числе, где степень тройки равна n, а последний раз скажет «да» на числе, где степень двойки равна m. Тем самым мы узнаем и n, и m, значит, и само Васино число. Если же Вася ни разу не сказал «да», то у него число 2^{20}. Покажем теперь, что $k\ge20$. Если Петя назовёт не более 19 чисел, то мы не можем гарантированно распознать числа 2^m и 2^{m+1}, т.к. среди 19 Петиных чисел найдётся число, содержащее 2^m, но нет числа, содержащего 2^{m+1}, где $m\le18$ (всего вариантов степени двойки – 21). Тем самым по Васиным ответам «да» мы узнаем, что степень двойки будет не меньше m, а по ответам «нет», что степень двойки будет не больше $m+2$, а саму её так и не узнаем.)**

12. В музее современного искусства размещено 200 шедевров абстрактной живописи. Изучив эти шедевры, искусствовед установил, что для рисования всех этих картин вместе использовано k цветов и наборы цветов у любых двух картин различны. Оказалось, что нет цвета, присутствующего на всех картинах, но для любых двух картин найдется общий цвет. При каком наименьшем k такое возможно? (**9. Пронумеруем цвета числами от 1 до k. Закодируем двоичным k-значным кодом каждую картину, где 1 в соответствующем разряде означает, что данный цвет присутствует в картине, 0 – нет. У всех картин разные коды, т.к. наборы цветов у картин различны. Если цветов не более 7, то кодов не более $2^7=128<200$ – противоречие. Если цветов 8, то кодов – $2^8=256$. Разобьём все их на пары дополняющих друг друга до полного кода из 8 единиц: 10000000↔01111111, 11000000↔001111111 и т.д. (где у одного 1, у другого – 0, и наоборот). Всего таких пар 128, значит, найдутся коды из одной пары, но они не пересекаются, следовательно, соответствующие им картины не имеют общего цвета, – противоречие. Значит, цветов не менее 9. Для 9 цветов в качестве примера возьмём 200 из всех кодов, содержащих 5 или 6 единиц. Количество таких кодов равно $C_9^5+C_9^6=C_{10}^6=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=210>200$, т.е. их хватает на 200 картин. При этом любые две картины в сумме содержат не менее 10 цветов из 9 имеющихся, т.е. у них обязательно есть общий цвет. При этом у них у всех вместе нет общего цвета, т.к. иначе количество таких картин-кодов было бы не больше $C_8^4+C_8^5=C_9^5=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=126<200$.)**

13. В произведении пятизначных чисел $\overline{НОВЫЙ}\times\overline{ОБМАН}$ разные буквы обозначают разные цифры, одинаковые буквы – одинаковые цифры. На какую наибольшую степень двойки может делиться данное числовое выражение? *Приведите ответ и пример с разложением на простые множители.* **(<u>29, например, 49152×98304=(2^{14}·3)×(2^{15}·3)</u>. Наибольшая степень двойки, на которую делится пятизначное число, – 2^{16}=65536, но она не подходит, так как есть одинаковые цифры. Далее идут числа, кратные 2^{15} – 32768 и 98304. Одновременно мы их использовать не можем (буквы в словах «новый и обман» повторяются определённым образом), поэтому используем число, кратное 2^{14}, и строим пример.)**

14. Какое наибольшее количество вершин может быть у выпуклого многоугольника, если известно, что у каждой вершины обе координаты — целые числа от 0 до 4? *Приведите ответ и пример.* **(<u>9</u>, см. пример на рис. Всего существует 5 вертикальных и 5 горизонтальных линий сетки (соответственно с абсциссами и ординатами 0, 1, 2, 3, 4), на каждой из которых будет не более двух вершин выпуклого многоугольника, т.к. такая линия либо может пересекать контур максимум в двух точках, либо содержит целиком всю сторону (значит, и 2 вершины). Тогда у многоугольника не более 5·2=10 вершин. Предположим, что существует многоугольник с 10 вершинами, тогда на каждой такой линии ровно по 2 вершины. Рассмотрим две вершины на нижней линии (с ординатой 0), их абсциссы (*k* < *n*) отличаются ровно на 1, иначе с промежуточной абсциссой (*n*–1) будет максимум 1 вершина (сверху), а должно быть 2. По принципу Дирихле из 3 оставшихся абсцисс (кроме *k*=*n*–1 и *n*) хотя бы 2 будут с одной стороны (не умаляя общности, будем считать, что справа – см. рис.). Тогда на вертикальных линиях с абсциссами *n*+1 и *n*+2 должны быть нижние вершины, но мы не можем каждый раз по вертикали сдвинуться ровно на 1, иначе у нас будут сразу 3 вершины (*n*, 0), (*n*+1, 1), (*n*+2, 2), лежащие на одной прямой. Значит, на участке от вершины (*n*, 0) до (*n*+2, *m*), где *m*≥3 не будет правой вершины либо с ординатой 1, либо с ординатой 2. Противоречие. Значит, ровно 10 вершин у нашего многоугольника быть не может, следовательно, вершин – не более 9, что и требовалось доказать.)**





15. Пусть x_1, x_2 – корни приведённого квадратного трёхчлена с дискриминантом 1; y_1, y_2 – корни приведённого квадратного трёхчлена с дискриминантом 16; z_1, z_2 – корни приведённого квадратного трёхчлена с дискриминантом *D*. При каком наибольшем *D* могло выполняться равенство $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$? **(<u>25</u>. Если x_1, x_2 – корни приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$, тогда по теореме Виета $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q = D$, значит, $|x_2 - x_1|=1$. Аналогично, $|y_2 - y_1|=3$, $|z_2 - z_1| = \sqrt{D}$. Тогда равенство $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$ возможно в одном из случаев $\pm1\pm4\pm\sqrt{D}=0$, откуда $D\in\{9, 25\}$. Значит, наибольший *D*=25 и такие трехчлены существуют, например, x^2+x, x^2+4x и x^2+5x с дискриминантами 1, 16 и 25 соответственно.)**

16. Расставьте в клетках таблицы 4×4 по одному все целые числа от 1 до 16 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел была простым числом. *В примере также указать сумму в каждом ряду.* **(Например, поступим следующим образом. Разобьём сначала наши числа на пары, дающие в сумме 17, и расставим эти пары так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма была равна 34=2·17, записывая половину пар с меньшего числа, а половину – с большего. После этого (см. рис.) переставим числа 2 и 5, 4 и 7, стоящие в четырёх разных строках и столбцах. Тогда в каждом ряду сумма изменится на 3 и станет равной либо 31, либо 37, а это простые числа.)**

1	16	5	12	34
15	2	11	6	34
14	3	10	7	34
4	13	8	9	34
34	34	34	34	

1	16	2	12	31
15	5	11	6	37
14	3	10	4	31
7	13	8	9	37
37	37	31	31	