XVII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XIV Турнир математических игр. Математическая игра «Дуэль».

Старшая лига (9-11 классы). 10 сентября 2021 года.

1. В вершинах куба расставили числа $1^2, 2^2, \ldots, 8^2$ (в каждую из вершин – по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений.

2. «Хромой» шахматный конь чередует обычные ходы и «короткие», при которых он перемещается на соседнюю по диагонали клетку. Он начинает движение по доске 5×6 с обычного хода (и сам выбирает начальную клетку). Какое наибольшее число ходов он может сделать, не посещая ни одну клетку, в том числе, и начальную, больше одного раза? *Приведите ответ и пример.*

3. В параллелограмме отрезки, соединяющие вершину одного из его углов с серединами несмежных с ним сторон, делят этот угол на три равные части. Какие значения может принимать этот угол?

4. Найдите все возможные действительные t, для которых существуют действительные x, y и z такие, что $xy+yz+zx=1$ и

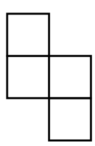
$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=\frac{t}{x+y+z-xyz}.$$

5. Приведите пример пяти пар двузначных чисел m и n, для которых число $(m+n-1)(m+n)$ делится на mn. *Ответ обоснуйте.*

6. Найдите все натуральные n, у которых существует такой положительный делитель d, что число n^2+7d является точным квадратом.

7. Внутри равнобедренного треугольника ABC с углом A, равным 110°, отмечена точка M. Оказалось, что $\angle BCM = 30°$ и $\angle CBM = 25°$. Найдите угол AMB.

8. В таблице 3 строки и 12 столбцов. В ней расставлены числа. Известно, что сумма чисел в таблице равна 10, а сумма чисел в каждой фигурке вида, показанного на рисунке, равна 1 (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Чему равна сумма чисел во второй строке таблицы?



9. В треугольнике ABC точка M — середина стороны $BC=2$, $\angle C = 90°+\angle B/2$, $\angle AMC = 45°$. Найдите AB.

10. Во всех боковых гранях треугольной пирамиды $ABCS$ проведены биссектрисы из вершины S. Во сколько раз площадь треугольника из оснований биссектрис меньше площади самого основания ABC, если известно, что $SA=1$, $SB=2$, $SC=3$?

11. Вася задумал натуральное число, не большее 2^{20}, все простые делители которого не превосходят тройки. Петя пытается узнать это число. Для этого он одновременно называет k натуральных чисел, а Вася называет в ответ те из них, которые делятся на задуманное им число. При каком наименьшем k Петя сможет подобрать такие k чисел, что по полученному ответу заведомо определит задуманное Васей число?

12. В музее современного искусства размещено 200 шедевров абстрактной живописи. Изучив эти шедевры, искусствовед установил, что для рисования всех этих картин вместе использовано k цветов и наборы цветов у любых двух картин различны. Оказалось, что нет цвета, присутствующего на всех картинах, но для любых двух картин найдется общий цвет. При каком наименьшем k такое возможно?

13. В произведении пятизначных чисел $\overline{НОВЫЙ}\times\overline{ОБМАН}$ разные буквы обозначают разные цифры, одинаковые буквы – одинаковые цифры. На какую наибольшую степень двойки может делиться данное числовое выражение? *Приведите ответ и пример с разложением на простые множители.*

14. Какое наибольшее количество вершин может быть у выпуклого многоугольника, если известно, что у каждой вершины обе координаты — целые числа от 0 до 4? *Приведите ответ и пример.*

15. Пусть x_1, x_2 – корни приведённого квадратного трёхчлена с дискриминантом 1; y_1, y_2 – корни приведённого квадратного трёхчлена с дискриминантом 16; z_1, z_2 – корни приведённого квадратного трёхчлена с дискриминантом D. При каком наибольшем D могло выполняться равенство $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$?

16. Расставьте в клетках таблицы 4×4 по одному все целые числа от 1 до 16 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел была простым числом. *В примере также указать сумму в каждом ряду.*