XVII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XIV Турнир математических игр.
Математическая игра «Пенальти».

Младшая лига (7-8 классы). **Решения**. ***11 сентября 2021 года.***

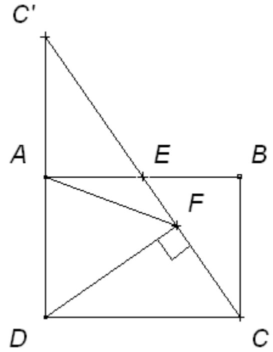
1. Натуральное $n > 2$ назовём *k-делимым*, если из чисел 1, 2, …, n можно выбрать два, произведение которых ровно в k раз больше суммы n–2 остальных. Найдите все натуральные k, для которых существуют k-делимые числа. **(1, 2, 3, 4, 6. Заметим, что k не превосходит отношения произведения двух самых больших чисел (n и (n–1)) к сумме остальных, т.е.**

$$k \le \frac{n(n-1)}{1+2+\ldots+(n-2)} = \frac{n(n-1)}{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = \frac{2n}{n-2} = 2+\frac{4}{n-2} \le 6$$

. Значение 5 могло получиться только при n=3, т.к. при n≥4 получим $k \le 2+\frac{4}{n-2} \le 2+\frac{4}{2} = 4$, но для набора (1, 2, 3) требуемое значение 5 получить невозможно. Для остальных натуральных n≤6 приведём примеры: k=1 → n=10 и 6·7=42=1+2+3+4+5+8+9+10; k=2 → n=4 и 2·4=8=2·(1+3); k=3 → n=6 и 5·6=30=3·(1+2+3+4); k=4 → n=4 и 3·4=12=4·(1+2); k=6 → n=3 и 2·3=6=6·1.)

2. В шахматном турнире участвуют 100 спортсменов из трёх стран. Оказалось, что среди любых N участников есть по крайней мере двое одного возраста. При каком наибольшем N можно утверждать, что или из какой-то страны приехали трое участников одного возраста, или из трёх разных стран приехало по одному участнику одного возраста? **(N=25. При N=25 существует не более 24 вариантов возраста, иначе можно взять 25 человек разного возраста, что противоречит условию. Тогда по принципу Дирихле среди 100 человек найдутся хотя бы 5 человек одного возраста. Предположим теперь, что нет ни трёх участников одного возраста из одной страны, ни трёх участников одного возраста из трёх разных стран. Значит, среди найденных нами хотя 5 участников одного возраста будут представители максимум двух стран и по максимуму по 2 человека, т.е. не более 2·2=4 участников этого возраста. Противоречие. Значит, или из какой-то страны приехали трое участников одного возраста, или из трёх разных стран приехало по одному участнику одного возраста. При N≥26 существует контрпример: из первой страны приехали 50 человек (по 2 человека 25 разных возрастов), из второй страны – 48 человек (по 2 человека 24 возрастов из 25 имеющихся у первой страны), из третьей страны – 2 человека возраста, не встречающегося у второй страны, но встречающегося у первой страны.)**

3. В прямоугольнике $ABCD$ точка E – середина стороны AB, а F – такая точка на отрезке CE, что ∠CFD=90°. Найдите ∠FAE, если известно, что ∠BEC=66°. **(42°. Рассмотрим точку C', симметричную C относительно E, тогда прямоугольные треугольники $AC'E$ и BCE симметричны, значит, равны. Тогда медиана AF из прямого угла F в треугольнике $C'FD$ равна половине гипотенузы, т.е. $AF=AD$, значит, треугольник FAD — равнобедренный с ∠DAF=180°–2∠ADF=180°–2·66°=48° (т.к. ∠ADF =360°–2·90°–∠AEF=180°–∠AEF=∠BEC в четырёхугольнике $AEFD$ (или же ссылаемся на свойство вписанного четырёхугольника), тогда ∠FAE=90°–∠DAF=90°–48°=42°.)**

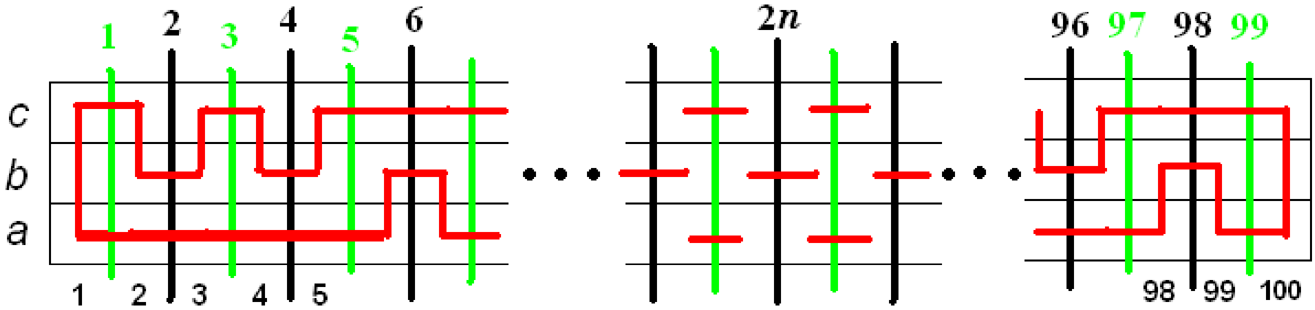


4. Вася записал подряд два простых числа a и b, состоящих из одинакового количества цифр. Из получившегося числа он вычел произведение ab и получил 154. Найдите числа a и b. **(19 и 97. Пусть $k(n)$ – количество цифр натурального числа n, причём $k(a)=k(b)=p$. Тогда из условия следует, что $a\cdot 10^p+b-ab=154$, откуда $a\cdot(10^p-b)=154-b$. При p≥3 равенство невозможно, т.к. $a\cdot(10^p-b) \ge 100\cdot 1 > 54 = 154-100 \ge 154-b$. При p=1 равенство невозможно, т.к. $a\cdot(10^p-b) \le 9\cdot 9 = 81 < 145 = 154-9 \le 154-b$. Значит, p=2. Тогда b≥89, т.к. иначе (при простом b≤83) получим $a\cdot(100-b) \ge 10\cdot 17=170>154-b$. При b=89 получим $a\cdot(100-b)=11a=154-b=65$, откуда a=65/11 – нецелое. При b=97 получим $a\cdot(100-b)=3a=154-b=57$, откуда a=57:3=19.)**

5. Найдите наименьшее десятизначное число из различных цифр, в котором в любой паре соседних цифр одна цифра делится на другую. **(Рассмотрев граф, в котором числа-вершины соединены ребром-делимостью, получим число 4826390517.)**

6. На перемене учительница оставила на столе классный журнал и дети стали выставлять туда оценки. Каждая девочка поставила 18 пятерок, а каждый мальчик – 11 двоек. В результате у каждой девочки появилось 7 оценок, а у каждого мальчика – 21 оценка. Сколько в классе мальчиков, если в классе меньше 30 школьников? (**11 мальчиков. Пусть в классе *d* девочек и *m* мальчиков. Тогда было выставлено 18*d*+11*m* оценок, а получено 7*d*+21*m*. Но это равные числа суммарного количества всех оценок, значит, из получившегося уравнения находим что 11*d*=10*m*. Тогда количество мальчиков кратно 11 и равно 11*k*, где *k* – натуральное число, а количество девочек равно 10*m*/11=10*k*. Всего школьников 10*k*+11*k*=21*k*<30, т.е. *k*=1 и *m*=11*k*=11.)**

7. Сколькими способами «хромой» король (ходит только на соседнюю по стороне клетку), стартовав в левом нижнем углу доски 3×100, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку? (**2^{50}. Пронумеруем клетки так, как показано на рисунке. Заметим, что клетки первого столбца могли быть связаны в замкнутом маршруте короля только так, как показано на рисунке. Рассмотрим вертикальные «тройные» перегородки (будем их**



называть ТП). Каждую из них маршрут пересечёт ровно по 2 раза (туда и обратно), при этом ТП1 пересечена обязательно снизу и сверху. ТП2 обязательно пересечена посередине и где-то с краю, иначе ладья не посетит клетку *b*2. Далее аналогичные рассуждения показывают, что каждая нечётная по номеру ТП пересечена в крайних строках, а каждая чётная по номеру ТП обязательно пересечена в средней строке и одной из крайних. При этом весь маршрут восстанавливается однозначно. Значит, количество маршрутов короля равно $2\cdot 2^k$, где *k*=49 – количество чётных ТП, т.к. второе пересечение в каждой чётной ТП можно выбрать двумя способами. Также умножаем на 2, т.к. у нас два направления обхода маршрута (туда и обратно).)

8. Найдите наименьшее натуральное число, с которого начинается ряд, наибольший по количеству идущих подряд натуральных чисел, у каждого из которых суммы цифр не делятся на 8. (**9999993. В каждом десятке (10 чисел, идущих от оканчивающегося на 0 до числа, оканчивающегося на 9) может быть максимум 7 чисел идущих подряд, у которых суммы цифр не делятся на 8, т.к. их суммы цифр возрастают на 1 с увеличением числа на 1, в среди 8 подряд идущих натуральных чисел ровно одно делится на 8. Значит, у нас могут быть числа максимум из двух десятков, т.к. при числах из трёх десятков мы захватим сразу целый десяток (второй). Следовательно, у нас не более 2·7=14 подряд идущих чисел. При этом в таком ряду из 14 чисел на переходе в следующий десяток необходимо, чтобы сумма цифр со сравнимой с 7 превратилась в сравнимую с 1 по модулю 8. А на такой переход влияет количество 9 (*n* штук) в конце последнего числа десятка, т.к. сумма цифр уменьшается на 9*n*–1, Значит, 9*n*–1≡6 (mod 8), откуда *n*–1≡6, *n*≡7 (mod 8). Значит, число, оканчивающееся на девятки, должно содержать их хотя бы 7 штук, т.е. будет не меньше числа из 7 девяток. Отсюда и возникает нужный нам пример.)**

9. Дано натуральное число $n > 1000$, имеющее больше 5 делителей. Пусть $d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > d_5$ — пять его наибольших и отличных от n делителей. Приведите пример с обоснованием, когда выполняется равенство $d_1+d_2+d_3-d_4+d_5 = n$. (**Например, $n=2^2\cdot 3\cdot 101=1212$. Действительно, тогда**

$$d_1+d_2+d_3-d_4+d_5=\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}-\frac{n}{6}+\frac{n}{12}=\frac{6n+4n+3n-2n+n}{12}=n$$**, что нам и требовалось.** ***Комментарий:*** ***Решение крутится вокруг классической суммы*** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$***, при этом очень важно, что 2 будет в квадрате, 3 в первой степени, иначе появятся ещё делители*** $\frac{n}{8}$ ***и*** $\frac{n}{9}$***, что нас уже не устраивает. А в качестве дополнительных множителей, чтобы число было больше 1000, можно брать любые простые числа, не меньшие 13.*** **)**

10. Дима разрезал квадрат на три прямоугольника периметра 6 каждый. Вова тоже разрезал этот квадрат на три прямоугольника одинакового периметра. Какого? Перечислите все возможности. *Ответ дать числами в десятичной записи.* **(<u>6; 6,4 или 5,625</u>. Из 4 вершин квадрата, которые принадлежат 3 прямоугольникам разрезания, по принципу Дирихле 2 вершины окажутся вершинами одного прямоугольника. Но тогда это две соседние вершины, иначе сам квадрат окажется прямоугольником разрезания. Значит, одна линия разреза будет идти от края до края параллельно стороне квадрата. Два других прямоугольника получатся либо разрезанием ещё одним параллельным отрезком (см. рис. 1), когда получатся 3 равных прямоугольника, либо перпендикулярным отрезком, когда получатся два одинаковых прямоугольника (см. рис. 2). Будем эти два вида разрезания называть соответственно 1-м и 2-м. Если Димаа применил разрезание 1-го вида, то периметр 6=8*a*, откуда *a*=3/4, сторона квадрата равна 9/4. Если Дима применил разрезание 2-го вида, то периметр 6=2(*b*+*c*)+2*c*=2*b*+(*b*+*c*), откуда *b*=3*c*, *c*=0,6, а сторона квадрата равна 4*c*=2,4. Если Вова применил то же самое разрезание, что и Дима, то он получил прямоугольники с тем же периметром 6. Если Вова применил разрезание 2-го вида при разрезании 1-го у Димы, то малая сторона Вовиного длинного прямоугольника равна 9/4:4=9/16, а периметр его прямоугольника равен 10*c*=45/8=5,625. Если же Вова применил разрезание 1-го вида при разрезании 2-го у Димы, то малая сторона Вовиного прямоугольника равна 2,4/3=0,8, а периметр его прямоугольника равен 8·0,8=6,4.)**

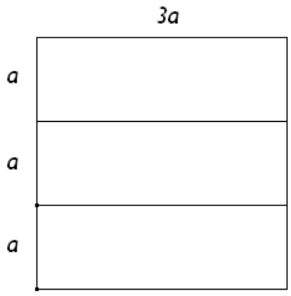


рис.1

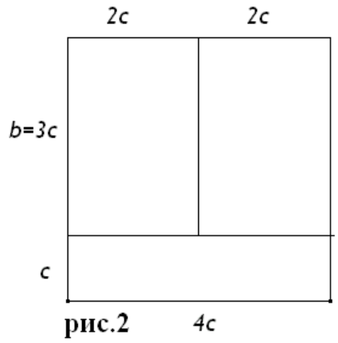


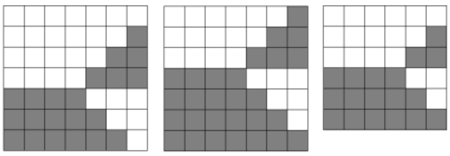
рис.2

11. Кузнечик Кузя прыгает по числовой прямой. Он начинает в точке 0 прыжком длины 1. Каждый следующий прыжок должен быть либо на 1 больше предыдущего, либо на 1 меньше предыдущего (направление прыжка вдоль прямой может быть любым). Кузя хочет попасть в точку 2021, причём так, чтобы его последний прыжок имел длину 1. За какое наименьшее число прыжков он может этого добиться? **(<u>89 прыжков</u>. Заметим, что если самый длинный прыжок по длине равнялся (*n*+1), до этого Кузя сделал хотя бы *n* прыжков и после этого ещё хотя бы *n* прыжков, т.к. последний прыжок имел длину 1. Все вместе эти прыжки по длине составили не меньше 2·(1+2+3+…+*n*)+(*n*+1)=(*n*+1)^2≥2021, откуда *n*+1≥45, т.е. *n*≥44, а всего прыжков не менее 2·44+1=89. В качестве примера подойдёт следующий. Кузя сначала совершает прыжки, постоянно увеличивая их длину до 45, а потом уменьшая до 1, при этом только один прыжок длины 2 делает налево, а все остальные прыжки – направо. Тогда он попадёт в точку 45^2–2·2=2025–4=2021, что ему и требовалось. *<u>Комментарий</u>: Очередная задача, где важно помнить, что ближайший точный квадрат к нынешним годам – это 45^2=2025.*)**

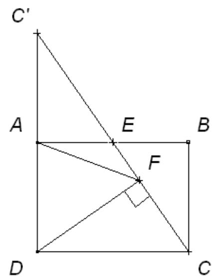
12. На трибунах хоккейной арены несколько рядов по 168 мест в каждом ряду. На финальный матч в качестве зрителей пригласили 2021 ученика нескольких спортивных школ, не более чем по 40 от школы. Учеников каждой школы требуется разместить на один ряд. Какое наименьшее количество рядов должно быть на арене, чтобы в любом случае это удалось сделать? **(<u>15</u>. Пусть на матч пришли по 35 школьников из 15 школ и по 34 школьника из 44 школ, всего 35·15+34·44=2021 школьник из 15+44=59 спортшкол. На один ряд можно посадить учеников максимум из 4 школ, т.к. иначе на ряду надо иметь не менее 34·5=170>168 мест. Значит, нам потребуется не менее 15 рядов, т.к. иначе мы сможем усадить не более 14·4=56 школ из имеющихся 59. Докажем теперь, что 15 рядов нам всегда хватит. Начнём рассаживать школы по рядам подряд *по убыванию количества* школьников пока на ряд можно усадить ещё какую-нибудь школу, причём в конце ряда можно посадить школу, которая не является следующей по количеству учеников, пропустив несколько школ с б*О*льшим количеством учеников. Если такой возможности нет, то переходим на следующий ряд. Рассмотрим только что заполненный ряд. Тогда на нём сидят учащиеся *p* школ, в каждой из которых не менее *k* учеников, где *k* – наименьшее количество учеников среди оставшихся школ, причём школу с *k* учениками уже не удастся посадить на этот ряд. Каждая школа занимает не более 40 мест, в ряду 168 мест, значит, *p*≥[168:4]=4. На каждом ряду занятыми будут не менее 136 мест, т.к. иначе заняты максимум 135 мест учениками из минимум 4 школ, т.е. на этом ряду представлена школа с максимум [135:4]=33 учениками, тогда *k*≤33 и на этот ряд (с ещё хотя бы 168–135=33 свободными местами) можно будет ещё посадить учеников из самой малой по численности школ из**

оставшихся. Тогда на первые 14 рядов мы уже посадим не менее 136·14=1904 школьников, если процесс рассадки не остановится раньше, и на последний (15-й) ряд остальных максимум 2021–1904=117 школьников очевидным образом усадить удастся. ***Комментарий: В данной задаче при доказательстве оценки применена достаточно часто встречающаяся идея контрпримера.*****)**

13. Найдите наименьшее натуральное число, которое для любой цифры (от 0 до 9) имеет делитель, оканчивающийся этой цифрой. **(270. Должен быть делитель, оканчивающийся на 0, значит, число должно оканчиваться на 0. Нам надо ещё четыре нечётных делителя, оканчивающихся на 1, 3, 7 и 9, которые никак не связаны с окончанием на 0, что даёт нам чётные делители и делители, оканчивающиеся на 5. Для этого число должно иметь не менее двух различных простых нечётных множителей, отличных от 5, или же какой-то простой множитель хотя бы в третьей степени. Перебор таких вариантов, дающих меньше 3^3=27, даёт нам только вариант 3·7 с делителями 1, 3, 7, 21, который нас не устраивает. Значит, наше число не меньше 270=$2{\cdot}3^3{\cdot}5$, а это число подходит, т.к. у него есть 10 нужных нам делителей – 1, 2, 3, 54=$2{\cdot}3^3$, 5, 6=2·3, 27=3^3, 18=$2{\cdot}3^2$, 9=3^2, 10.** ***Комментарий 1: Шикарная задача, в которой школьники массово попадают в ловушку однозначных чисел и им кажется, что ответ – НОК (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)=2520. А задача хитрее! И, кстати, написать её достаточно короткое решение – совсем неподарок! Комментарий 2: Представленное решение отчётливо показывает важность понимания нахождения количества всех натуральных делителей натурального числа n, которое вычисляется по формуле*** $\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$***, где*** α_1, α_2, …, α_k ***– степени различных простых множителей в разложении натурального числа n на простые множители. Рекомендуем также разобраться с подсчётом количества чётных, нечётных и т.п. делителей.*****)**



14. Какое количество закрашенных клеток может быть в таблице $n\times n$, в которой во всех столбцах равное количество закрашенных клеток, а во всех строках – различное? **(При нечётном *n* оно равняется либо (*n*-1)*n*/2, либо (*n*+1)*n*/2 – для обоих случаев расстановка существует, а при чётном *n* оно равняется $n^2/2$ – такая расстановка тоже существует; на рисунке приведены расстановки при *n*=7 и *n*=6, которые обобщаются на все *n*. Количество закрашенных клеток не меньше 0+1+2+…+(*n*-1)=(*n*-1)*n*/2 и не больше 1+2+…+*n*=(*n*+1)*n*/2, и при этом должно делиться на *n*.)**



15. В прямоугольнике *ABCD* точка *E* – середина стороны *AB*, а *F* – такая точка на отрезке *CE*, что ∠*CFD*=90°. Найдите ∠*FAE*, если известно, что ∠*BEC*=77°. **(64°. Рассмотрим точку *C'*, симметричную *C* относительно *E*, тогда прямоугольные треугольники *AC'E* и *BCE* симметричны, значит, равны. Тогда медиана *AF* из прямого угла *F* в треугольнике *C'FD* равна половине гипотенузы, т.е. *AF*=*AD*, значит, треугольник *FAD* — равнобедренный с ∠*DAF*=180°–2∠*ADF*=180°–2·77°=26° (т.к. ∠*ADF* =360°–2·90°–∠*AEF*=180°–∠*AEF*=∠*BEC* в четырёхугольнике *AEFD* (или же ссылаемся на свойство вписанного четырёхугольника), тогда ∠*FAE*=90°–∠*DAF*=90°–26°=64°.)**

16. При каком наименьшем количестве слагаемых-«задач» ребус $\overline{ЗАДАЧА}+\overline{ЗАДАЧА}+...+\overline{ЗАДАЧА}=\overline{ТУРНИР}$ имеет решение? *Одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры. Приведите ответ и пример.* **(3 слагаемых, например, 236383+236383+236383=709149. Одного слагаемого быть не может, т.к.** $\overline{ЗАДАЧА}\neq\overline{ТУРНИР}$**. Если всего два слагаемых, то сложение *А*+*А* должно быть выполнено в трёх различных разрядах, при этом последние цифры результатов с учётом переносов из предыдущих разрядов записываются тремя различными буквами – *У*, *Н* и *Р*. Но это невозможно, так как *А*+*А* с учётом переноса может принимать только два разных значения – эта сумма является либо некоторым чётным числом (если нет переноса из предыдущего разряда), либо следующим за ним нечётным (если есть перенос единицы из предыдущего разряда, а переноса большего количества единиц быть не может). Таким образом, должно быть не менее трёх слагаемых.)**