XVII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XIV Турнир математических игр.
Математическая игра «Пенальти».
<u>Старшая лига (9-11 классы).</u> **<u>Решения</u>. *11 сентября 2021 года.***
<u>1 вариант (задачи 1-8) – для 10-11 классов</u>

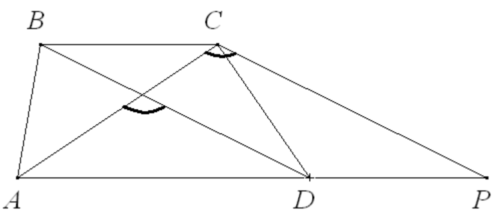
1. При каком наибольшем n неравенство $81x^4+y^4+nxy+2 \ge 0$ выполняется для любых действительных чисел x и y? **(<u>12</u>. Сделаем замену переменных $t=3x$, тогда наше неравенство примет вид $t^4+y^4+nty/3+2 \ge 0$. Возьмём $t=1$, $y=-1$, тогда должно выполняться неравенство $4-n/3\ge0$, откуда $n\le12$. Докажем теперь, что при всех таких n неравенство $t^4+y^4+nty/3+2 \ge 0$ выполняется для всех действительных t и y. Имеем $t^4+y^4+nty/3+2 = t^4-2t^2y^2+y^4+2t^2y^2+nty/3+2 = (t^2-y^2)^2 + 2z^2+nz/3+2\ge0$ – верное неравенство при $n\le12$ и любом действительном $z=ty$, т.к. квадратный трехчлен $6z^2+nz+6\ge0$ в силу неположительности дискриминанта $D=n^2-4\cdot6\cdot6=n^2-144\le0$ при $-12\le n\le12$. *<u>Комментарий</u>*: Нетрудно заметить, что эта задача – продолжение задачи 4-4 из «Домино»:☺.)**

2. Найдите все натуральные a и b такие, что $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=1.$
(<u>$a=3n-1$, $b=(2n-1)^3+(3n-1)^2$, где n – любое натуральное число</u>. Пусть $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=x,\ \sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=y,\ x+y=1.$ Возведём в куб наше уравнение: $1=(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=2a+3xy$. Значит, $3xy=1-2a$, что равносильно $27(xy)^3=(1-2a)^3$, откуда (*) $27(a^2-b)=(1-2a)^3 \Leftrightarrow (2a-1)^3+27a^2=27b$. Кроме того, из (*) следует $1-2a \,\vdots\, 3$, т.е. $1-2a\equiv1+a\equiv0 \pmod 3$, т.е. $a\equiv-1\equiv2 \pmod 3) \Leftrightarrow a=3n-1$, где n – любое натуральное число. Подставим $a=3n-1$ и получим, что натуральное число $(2a-1)^3+27a^2=(6n-3)^3+27\cdot(3n-1)^2=27\cdot((2n-1)^3+(3n-1)^2)$ делится на 27 при всех натуральных $a=3n-1$, значит, $b=(2n-1)^3+(3n-1)^2$ – натуральное число.)

3. Натуральные числа x, y и z таковы, что числа $\dfrac{y+1}{x-1}$, $\dfrac{z+1}{y-1}$ и $\dfrac{x+1}{z-1}$ — целые. Найдите наибольшее возможное значение произведения xyz. *Приведите ответ и пример.* **(<u>693, например, при $x=11$, $y=9$, $z=7$</u>. Предположим, что $xyz\ge694$, то по принципу Дирихле самое большое число (в силу цикличности наших алгебраических выражений можно считать, что x) будет не меньше 9, т.к. иначе $xyz\le8^3=512<694$. Тогда при $x\ge9$ целое число $\dfrac{y+1}{x-1}\le\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}\le1+\dfrac{2}{8}$ будет равно 1, значит, $y+1=x-1$, т.е. $y=x-2$. При $x\ge9$ целое число $\dfrac{z+1}{y-1}\le\dfrac{x+1}{x-3}=1+\dfrac{4}{x-3}\le1+\dfrac{4}{6}$ будет равно 1. Тогда $z+1=y-1 \Leftrightarrow z=y-2=x-4$. Значит, целое число $\dfrac{x+1}{z-1}=\dfrac{x+1}{x-5}=1+\dfrac{6}{x-5}\le1+\dfrac{6}{4}$. Но оно больше 1, значит, оно равно 2, тогда из уравнения $x+1=2(x-5)$ находим $x=11$, значит, $y=x-2=9$, $z=x-4=7$. Тогда $xyz=11\cdot9\cdot7=693<694$ – противоречие. Значит, $xyz\le693$.)**

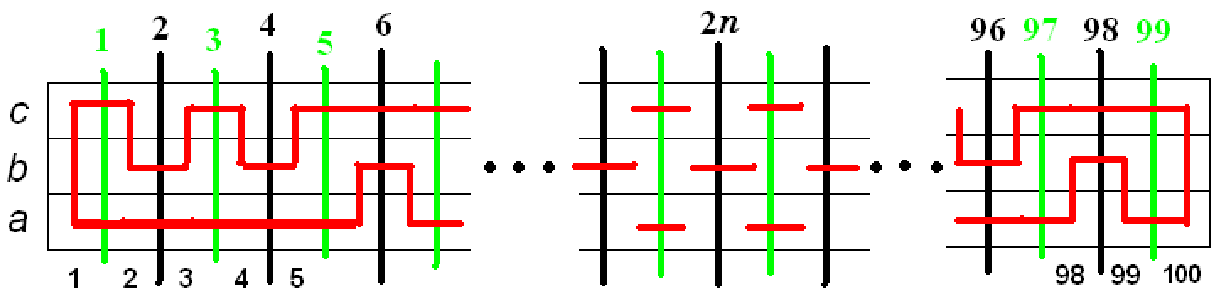
4. Назовём натуральное число *хорошим*, если оно представимо в виде суммы трёх натуральных чисел $a<b<c$ таких, что c делится на b и b делится на a. Найдите наибольшее нехорошее число. **(<u>24</u>. Любое нечётное число, не меньшее 7, можно представить как $1+2+2(n-1)=2n+1\ge7$ при $n\ge3$. Любое чётное натуральное число можно представить в виде $a=2^m\cdot n$, где n – нечётное натуральное число, m – степень вхождения двойки в разложение на простые множители. Тогда при $m=1$ хорошими будут числа $a=2+4+4(n-1)=4n+2\ge14$ при $n\ge3$; при $m=2$ хорошими будут числа $a=4+8+8(n-1)=8n+4\ge28$ при $n\ge3$; при $m=3$ хорошими будут числа $a=8+16+16(n-1)=16n+8\ge56$ при $n\ge3$, а также $8\cdot5=40=1+3+36$; при $m\ge4$ хорошими будут числа $a=2^{m-4}\cdot n+3\cdot2^{m-4}\cdot n+12\cdot2^{m-4}\cdot n=2^{m-4}\cdot n\cdot(1+3+12)=2^m\cdot n\ge16$. Значит, начиная с 25, все натуральные числа – хорошие. Убедиться же в том, что 24 не является хорошим, можно следующим образом. 24 нельзя представить в виде требуемой *хорошей* суммы $a+b+c=a+ka+kla=a(1+k(1+l))\ge a(1+2\cdot(1+2))\ge7a$, где a – натуральное, k, l – натуральные, не меньшие 2, что проверяем перебором делителей $(1+k+kl)$ числа 24, не мень-**

ших 7. Таких делителей три – 8, 12 и 24. Во всех трёх случаях составное число $k(1+l)$ окажется равным простому (7, 11 и 23) – противоречие.)



5. В трапеции средняя линия равна 7, высота равна $\frac{15\sqrt{3}}{7}$, а угол между диагоналями против основания равен 120°. Найдите диагонали трапеции. **(<u>6 и 10</u>. Через вершину C меньшего основания BC трапеции $ABCD$ проведём прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с прямой AD в точке P. Тогда $AP=AD+DP=AD+BC=2\cdot7=14$. Обозначим $AC=x$, $BD=CP=y$. Поскольку $\angle ACP=120°$, то $AC^2+CP^2-2AC\cdot CP\cdot\cos 120°=AP^2$, или $x^2+y^2+xy=196$. С другой стороны, $S_{\Delta APC}=\frac{xy\cdot\sin 120°}{2}=\frac{1}{2}\cdot AP\cdot\frac{15\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}\cdot14\cdot\frac{15\sqrt{3}}{7}=15\sqrt{3}$, откуда $xy=60$. Из системы $x^2+y^2+xy=196$, $xy=60$ находим, что $AC=x=6$, $BD=y=10$ или $AC=x=10$, $BD=y=6$.)**

6. Сколькими способами «хромой» король (ходит только на соседнюю по стороне клетку), стартовав в левом нижнем углу доски 3×100, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку? **(<u>2^{50}</u>. Пронумеруем клетки так, как показано на рисунке. Заметим, что клетки первого столбца могли быть связаны в замкнутом маршруте короля только так, как показано на рисунке. Рассмотрим вертикальные «тройные» перегородки (будем их называть ТП). Каждую из них маршрут пересечёт ровно по 2 раза (туда и обратно), при этом ТП1 пересечена обязательно снизу и сверху. ТП2 обязательно пересечена посередине и где-то с краю, иначе король не посетит клетку $b2$.**



Далее аналогичные рассуждения показывают, что каждая нечётная по номеру ТП пересечена в крайних строках, а каждая чётная по номеру ТП обязательно пересечена в средней строке и одной из крайних. При этом весь маршрут восстанавливается однозначно. Значит, количество маршрутов короля равно $2\cdot2^k$, где $k=49$ – количество чётных ТП, т.к. второе пересечение в каждой чётной ТП можно выбрать двумя способами. Также умножаем на 2, т.к. у нас два направления обхода маршрута (туда и обратно).)

7. Все вершины пирамиды лежат на гранях куба, но не на его рёбрах, причём на каждой грани лежит хотя бы одна вершина. Какое наибольшее количество вершин может иметь пирамида? **(<u>13</u>. Сечение куба плоскостью основания пирамиды пересекает все его грани и, значит, является выпуклым шестиугольником. Вершины основания лежат на сторонах этого шестиугольника, но не в его вершинах. Нетрудно видеть, что, если на какой-то стороне лежит больше двух вершин основания, то соединить их несамопересекающейся ломаной, лежащей внутри шестиугольника, невозможно. Поэтому основание имеет не более 12 вершин, а пирамида — не более 13. Существование пирамиды с 13 вершинами очевидно.)**

8. 8 друзей пошли кататься на горку, каждый – со своей ледянкой. Сколько существует способов сесть им на ледянки так, чтобы каждый из друзей сидел на чужой ледянке? **(<u>14833</u>. Пусть a_n – искомое количество способов для n мальчиков. Очевидно, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, выведем рекуррентную формулу для a_n. Итак, пронумеруем детей и их ледянки. Первый ребёнок может сесть на n–1 ледянку. Для определённости будем считать, что он сел на вторую. Рассмотрим два случая: второй ребёнок сел на первую ледянку, и второй ребёнок сел не на первую ледянку. Заметим, что в первом случае количество способов рассадить остальных n–2 детей равно a_{n-2}. Во втором случае первая ледянка является «запретной» для второго. Тогда уберём из рассмотрения первого ребёнка и вторую ледянку, останется n–1 детей, условия рассадки которых подходят под условие задачи, количество этих рассадок равно a_{n-1}. Таким образом, получаем формулу $a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$. Тогда $a_4=3\cdot(2+1)=9$, $a_5=4\cdot(9+2)=44$, $a_6=5\cdot(44+9)=265$, $a_7=6\cdot(265+44)=1854$, $a_8=7\cdot(1854+265)=14833$.)**

<u>*2 вариант (задачи 9-16) – для 9 классов*</u>

9. Дано натуральное число $n > 1000$, имеющее больше 5 делителей. Пусть $d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > d_5$ — пять его наибольших и отличных от n делителей. Приведите пример с обоснованием, когда выполняется равенство

$d_1+d_2+d_3-d_4+d_5 = n$. **(<u>Например, $n=2^2\cdot3\cdot101=1212$</u>. Действительно, тогда $d_1+d_2+d_3-d_4+d_5=\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}-\frac{n}{6}+\frac{n}{12}=\frac{6n+4n+3n-2n+n}{12}=n$, что нам и требовалось.** ***<u>Комментарий:</u> Решение крутится вокруг классической суммы $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, при этом очень важно, что 2 будет в квадрате, 3 в первой степени, иначе появятся ещё делители $\frac{n}{8}$ и $\frac{n}{9}$, что нас уже не устраивает. А в качестве дополнительных множителей, чтобы число было больше 1000, можно брать любые простые числа, не меньшие 13.*)**

10. Дима разрезал квадрат на три прямоугольника периметра 6 каждый. Вова тоже разрезал этот квадрат на три прямоугольника одинакового периметра. Какого? Перечислите все возможности. *Ответ дать числами в десятичной записи.* **(<u>6; 6,4 или 5,625</u>. Из 4 вершин квадрата, которые принадлежат 3 прямоугольникам разрезания, по принципу Дирихле 2 вершины окажутся вершинами одного прямоугольника. Но тогда это две соседние вершины, иначе сам квадрат окажется прямоугольником разрезания. Значит, одна линия разреза будет идти от края до края параллельно стороне квадрата. Два других прямоугольника получатся либо разрезанием ещё одним параллельным отрезком (см. рис. 1), когда получатся 3 равных прямоугольника, либо перпендикулярным отрезком, когда получатся два одинаковых прямоугольника (см. рис. 2). Будем эти два вида разрезания называть соответственно 1-м и 2-м. Если Димаа применил разрезание 1-го вида, то периметр 6=8*a*, откуда *a*=3/4, сторона квадрата равна 9/4. Если Дима применил разрезание 2-го вида, то**

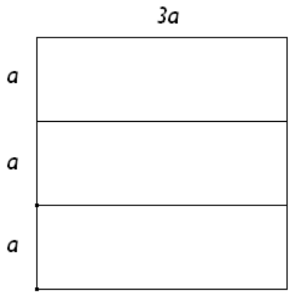


рис.1

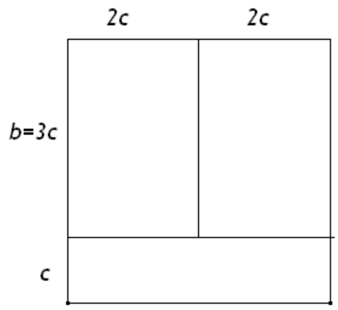


рис.2

периметр 6=2(*b*+*c*)+2*c*=2*b*+(*b*+*c*), откуда *b*=3*c*, *c*=0,6, а сторона квадрата равна 4*c*=2,4. Если Вова применил то же самое разрезание, что и Дима, то он получил прямоугольники с тем же периметром 6. Если Вова применил разрезание 2-го вида при разрезании 1-го у Димы, то малая сторона Вовиного длинного прямоугольника равна 9/4:4=9/16, а периметр его прямоугольника равен 10*c*=45/8=5,625. Если же Вова применил разрезание 1-го вида при разрезании 2-го у Димы, то малая сторона Вовиного прямоугольника равна 2,4/3=0,8, а периметр его прямоугольника равен 8·0,8=6,4.)

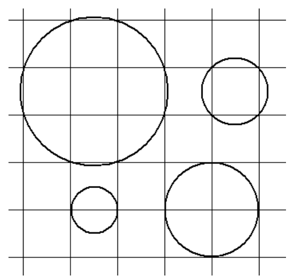
11. Изначально в каждой клетке квадрата 100×100 стоит по фишке. Ход состоит в том, что каждая фишка переставляется на одну из соседних по диагонали клеток. (На клетке может оказаться более одной фишки.) На какое наименьшее количество клеток можно в результате нескольких ходов переставить все фишки? **(<u>4</u>. Раскрасим нашу доску в 4 цвета квадратами 2×2 (см. рис.), тогда на каждом ходу фишки с 1-го цвета перепрыгивают на 3-й цвет, с 3-го – на 1-й, со 2-го – на 4-й, с 4-го – на 2-й, значит, на каждом цвете всегда будут фишки. Следовательно, для сбора фишек необходимо минимум 4 клетки. И действительно, все фишки могут собраться, например, на 4 клетках левого верхнего квадрата 2×2. Для этого каждая фишка сначала двигается вверх, дойдя до верхней горизонтали, а затем двигается влево, прыгая только в двух верхних горизонталях. Тогда максимум за 99+99=198 ходов каждая фишка окажется в левом верхнем квадрате 2×2, после чего она будет прыгать в пределах него. Значит, максимум через 198 операций все фишки соберутся на 4 клетках этого квадрата.)**

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3	4	3

12. На трибунах хоккейной арены несколько рядов по 168 мест в каждом ряду. На финальный матч в качестве зрителей пригласили 2021 ученика нескольких спортивных школ, не более чем по 40 от школы. Учеников каждой школы требуется разместить на один ряд. Какое наименьшее количество рядов должно быть на арене, чтобы в любом случае это удалось сделать? **(<u>15</u>. Пусть на матч пришли по 35 школьников из 15 школ и по 34 школьника из 44 школ, всего 35·15+34·44=2021 школьник из 15+44=59 спортшкол. На один ряд можно посадить учеников максимум из 4 школ, т.к. иначе на ряду надо иметь не менее 34·5=170>168 мест. Значит, нам потребуется не менее 15 рядов, т.к. иначе мы сможем усадить не более 14·4=56 школ из имеющихся 59. Докажем теперь, что 15 рядов нам всегда хватит. Начнём рассаживать школы по рядам подряд *по убыванию количества* школьников пока на ряд можно усадить ещё какую-нибудь школу, причём в конце ряда можно посадить школу, которая не является следующей по количеству учеников, пропустив несколько школ с б*О*льшим количеством учеников. Если такой**

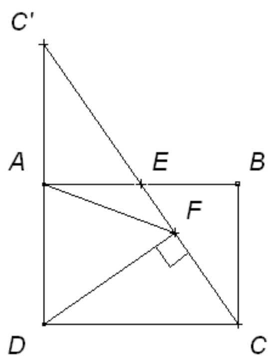
возможности нет, то переходим на следующий ряд. Рассмотрим только что заполненный ряд. Тогда на нём сидят учащиеся p школ, в каждой из которых не менее k учеников, где k – наименьшее количество учеников среди оставшихся школ, причём школу с k учениками уже не удастся посадить на этот ряд. Каждая школа занимает не более 40 мест, в ряду 168 мест, значит, $p\geq[168:4]=4$. На каждом ряду занятыми будут не менее 136 мест, т.к. иначе заняты максимум 135 мест учениками из минимум 4 школ, т.е. на этом ряду представлена школа с максимум [135:4]=33 учениками, тогда $k\leq 33$ и на этот ряд (с ещё хотя бы 168–135=33 свободными местами) можно будет ещё посадить учеников из самой малой по численности школ из оставшихся. Тогда на первые 14 рядов мы уже посадим не менее 136·14=1904 школьников, если процесс рассадки не остановится раньше, и на последний (15-й) ряд остальных максимум 2021–1904=117 школьников очевидным образом усадить удастся. *<u>Комментарий</u>: В данной задаче при доказательстве оценки применена достаточно часто встречающаяся идея контрпримера.*)

13. Найдите наименьшее натуральное число, которое для любой цифры (от 0 до 9) имеет делитель, оканчивающийся этой цифрой. **(<u>270</u>. Должен быть делитель, оканчивающийся на 0, значит, число должно оканчиваться на 0. Нам надо ещё четыре нечётных делителя, оканчивающихся на 1, 3, 7 и 9, которые никак не связаны с окончанием на 0, что даёт нам чётные делители и делители, оканчивающиеся на 5. Для этого число должно иметь не менее двух различных простых нечётных множителей, отличных от 5, или же какой-то простой множитель хотя бы в третьей степени. Перебор таких вариантов, дающих меньше $3^3=27$, даёт нам только вариант 3·7 с делителями 1, 3, 7, 21, который нас не устраивает. Значит, наше число не меньше $270=2\cdot3^3\cdot5$, а это число подходит, т.к. у него есть 10 нужных нам делителей – 1, 2, 3, $54=2\cdot3^3$, 5, $6=2\cdot3$, $27=3^3$, $18=2\cdot3^2$, $9=3^2$, 10. *<u>Комментарий 1</u>: Шикарная задача, в которой школьники массово попадают в ловушку однозначных чисел и им кажется, что ответ – НОК (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)=2520. А задача хитрее! И, кстати, написать её достаточно короткое решение – совсем неподарок! <u>Комментарий 2</u>: Представленное решение отчётливо показывает важность понимания нахождения количества всех натуральных делителей натурального числа n, которое вычисляется по формуле $\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$, где α_1, α_2, …, α_k – степени различных простых множителей в разложении натурального числа n на простые множители. Рекомендуем также разобраться с подсчётом количества чётных, нечётных и т.п. делителей.*)**



14. Какой может быть радиус у окружности, пересекающей линии клетчатой сетки только в узлах? **(<u>$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{10}}{2}$</u>. Всего существуют четыре окружности с нужным свойством, что доказывается перебором вариантов пересечения.)**

15. В прямоугольнике $ABCD$ точка E – середина стороны AB, а F – такая точка на отрезке CE, что $\angle CFD$=90°. Найдите $\angle FAE$, если известно, что $\angle BEC$=77°. **(<u>64°</u>. Рассмотрим точку C', симметричную C относительно E, тогда прямоугольные треугольники $AC'E$ и BCE симметричны, значит, равны. Тогда медиана AF из прямого угла F в треугольнике $C'FD$ равна половине гипотенузы, т.е. $AF=AD$, значит, треугольник FAD — равнобедренный с $\angle DAF$=180°–2$\angle ADF$=180°–2·77°=26° (т.к. $\angle ADF$ =360°–2·90°–$\angle AEF$=180°–$\angle AEF$=$\angle BEC$ в четырёхугольнике $AEFD$ (или же ссылаемся на свойство вписанного четырёхугольника), тогда $\angle FAE$=90°–$\angle DAF$=90°–26°=64°.)**



16. Найдите наименьшее натуральное число, с которого начинается ряд, наибольший по количеству идущих подряд натуральных чисел, у каждого из которых суммы цифр не делятся на 8. **(<u>9999993</u>. В каждом десятке (10 чисел, идущих от оканчивающегося на 0 до числа, оканчивающегося на 9) может быть максимум 7 чисел идущих подряд, у которых суммы цифр не делятся на 8, т.к. их суммы цифр возрастают на 1 с увеличением числа на 1, в среди 8 подряд идущих натуральных чисел ровно одно делится на 8. Значит, у нас могут быть числа максимум из двух десятков, т.к. при числах из трёх десятков мы захватим сразу целый десяток (второй). Следовательно, у нас не более 2·7=14 подряд идущих чисел. При этом в таком ряду из 14 чисел на переходе в следующий десяток необходимо, чтобы сумма цифр со сравнимой с 7 превратилась в сравнимую с 1 по модулю 8. А на такой переход влияет количество 9 (n штук) в конце последнего числа десятка, т.к. сумма цифр уменьшается на $9n$–1, Значит, $9n-1\equiv6$ (mod 8), откуда $n-1\equiv6$, $n\equiv7$ (mod 8). Значит, число, оканчивающееся на девятки, должно содержать их хотя бы 7 штук, т.е. будет не меньше числа из 7 девяток. Отсюда и возникает нужный нам пример.)**