XVII Всероссийская смена «Юный математик»
Личная олимпиада. 12.09.2021.
10-11 класс

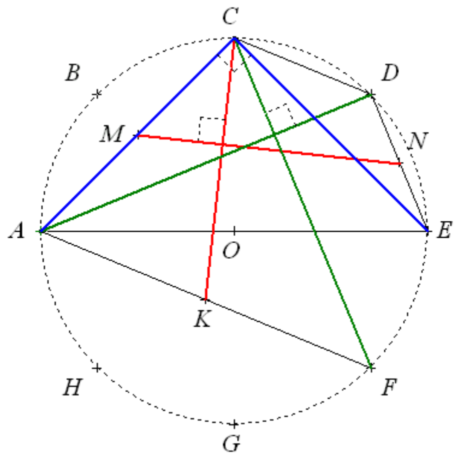
1. Докажите, что НОК (наименьшее общее кратное) четырёх натуральных чисел *a, b, c* и *d* не может равняться *ab+cd*.

Доказательство: Т.к. НОК делится на каждое из чисел, то сумма $ab+cd$ должна делиться на каждое из четырёх исходных чисел. Тогда cd делится не только на числа c и d, но и на числа a и b, т.к. первое слагаемое делится на a и b. Значит, cd делится на каждое из чисел, т.е. будет не меньше НОК (a,b, cd) $\geq$ НОК (a, b, c, d). Тогда $ab+cd$ будет больше НОК (a, b, c, d).

2. При каких значениях параметра *p* система неравенств $\begin{cases} x \geq (y-p)^2, \\ y \geq (x-p)^2 \end{cases}$ **имеет единственное решение?**

Ответ: $p=-1/4$. ***Решение:*** Если (x_0, y_0) – решение системы, то (y_0, x_0) – тоже решение системы, значит, $x_0=y_0$. Тогда решаем квадратное неравенство $x \geq (x-p)^2$, дискриминант которого равен $D=4p+1$, значит, единственное решение система будет иметь только в случае $D=0$, т.е. при $p=-1/4$.

3. *ABCDEFGH* – правильный восьмиугольник. *M, N, K* – середины отрезков *AC, DE* и *AF* соответственно. Докажите, что отрезки *MN* и *CK* равны и перпендикулярны.



Доказательство: Из свойств правильного восьмиугольника следует, что при повороте на 90° (на нашем чертеже это поворот по часовой стрелке) относительно центра многоугольника O точки A, C и D перейдут соответственно в точки C, E и F. Значит, перпендикулярны и равны отрезки в парах AC, CE и AD, CF, т.е. равны по длине и перпендикулярны соответствующие вектора в этих парах. Заметим теперь, что вектор $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AD})$, а вектор $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF})$. Учитывая указанные выше равенство длин и перпендикулярность векторов, получаем, что при повороте на 90° (по часовой стрелке) вектора $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{AD}$ перейдут в вектора $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CF}$, значит, их полусуммы перейдут друг в друга, т.е. вектора $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{CK}$ равны по длине и перпендикулярны.

4. Про действительные числа *a, b* и *c* известно, что $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. Верно ли, что все эти три числа равны между собой?

Ответ: неверно, например, равенство выполняется для набора из трёх различных чисел $a=1$, $b=t^2>1$ и $c=t$, где t – отрицательный корень многочлена $f(x)=x^3+x^2+1$ на интервале $(-2; -1)$. ***Доказательство***: Заметим, что $f(-2)=-3<0$, $f(-1)=1>0$, значит, на интервале $(-2; -1)$ наш многочлен действительно имеет корень, который и назовём t. Подставим вместо a, b и c соответственно значения 1, t^2 и t, которые между собой не равны. Получим, что должно выполняться условие: $1+t^2=t^4+t=t^2+1$. Это условие действительно выполняется, т.к. оно равносильно равенству $t^4-t^2+t-1=0$, которое верно в силу равенства $t^4-t^2+t-1=(t-1)(t^3+t^2+1)=0$, выполняющегося при отрицательном корне t многочлена $f(x)=x^3+x^2+1$ на интервале $(-2; -1)$.

Комментарий: *При нахождении примера можно было взять и a=0.*

Решение 2: неверно, например, равенству удовлетворяет тройка чисел 7/4, –5/4, 1/4.

5. На доске из 2020 строк и 2021 столбца поставили в некоторые клетки по одной белой фишке так, что в каждом столбце стоит хотя бы одна фишка. Верно ли, что все фишки нескольких столбцов можно покрасить в чёрный цвет так, чтобы в каждой строке было чётное количество чёрных фишек? (*Переформулировка задачи №205 (автор – Н.Б.Васильев) из задачника «Кванта» – решение на с.36-38 журнала «Квант» №2 за 1974 год.*)

Ответ: верно. *Доказательство*: Подсчитаем, сколькими способами можно закрасить несколько столбцов в чёрный цвет. Каждый столбец мы либо закрашиваем, либо нет, значит, всего 2^{2013} способов. Для каждого из 2^{2021} подмножеств столбцов (в том числе, и пустого подмножества) сопоставим цифру 1 тем строкам, в которых нечётное количество красных фишек, и 0 – тем строкам, в которых чётное количество чёрных фишек. Таким образом, каждому подмножеству столбцов мы поставим в соответствие двоичный 2020-ти-значный код. Таких кодов $2^{2020}<2^{2021}$. Следовательно, по принципу Дирихле, найдутся два разных подмножества столбцов A и B такие, что им соответствует один и тот же двоичный код. Отметим теперь те столбцы, которые входят ровно в одно из множеств A и B, т.е. в множество $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \Delta B$, которое при этом не является пустым. Поскольку в каждой строке количества чёрных фишек в A и B имеют одинаковую чётность, то для $A \Delta B$ количество чёрных фишек в каждой строке будет чётным.