XVII Всероссийская смена «Юный математик»
Личная олимпиада. 12.09.2021.
6-7 класс

1. Можно ли на шахматную доску поставить 16 не бьющих друг друга королей так, чтобы в каждой строке и каждом столбце стояло ровно по 2 короля?

	К		К				
					К		К
	К		К				
					К		К
К		К					
				К		К	
К		К					
				К		К	

<u>Ответ</u>: Да. ***<u>Решение</u>:*** Пример — на рисунке справа.

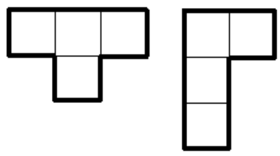
2. На острове рыцарей и лжецов два племени. Каждый островитянин произнес фразу: «В моем племени лжецов больше, чем в соседнем». Может ли на острове быть ровно 2021 жителей?

<u>Ответ</u>: Нет. ***<u>Решение</u>:*** Поскольку все островитяне сказали одно и то же, каждое племя состоит либо из одних рыцарей, либо из одних лжецов. Из одних рыцарей оно состоять не может: тогда получилось бы, что в другом племени отрицательное количество лжецов. Значит, оба племени состоят из одних лжецов. Поскольку число 2011 нечетно, в одном из племён больше жителей, чем в другом. Но тогда все лжецы из более многочисленного племени говорят правду, что невозможно.

3. Дано 8 трёхзначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два и записать их подряд таким образом, что получившееся шестизначное число будет делиться на 7.

<u>Решение</u>: Если трехзначные числа a и b записаны подряд, то получившееся шестизначное число равно $1000a+b = 1001a+(b–a)$. Поскольку 1001 делится на 7, $1000a+b$ делится на 7 тогда и только тогда, когда делится на 7 разность $b–a$. Осталось заметить, что среди любых восьми целых чисел найдутся два, дающие одинаковые остатки при делении на 7.

4. Докажите, что не существует клетчатого многоугольника из 28 клеток, который можно разрезать и на 7 четырёхклеточных фигурок вида буквы «Т», и на 7 четырёхклеточных фигурок вида буквы «Г» (см. рисунок справа). *Фигурки можно поворачивать и переворачивать.*



<u>Доказательство</u>: Раскрасим клетчатую плоскость в шахматном порядке. Тогда каждая фигурка «Г» накрывает ровно 2 чёрных и 2 белых клетки, значит, 7 таких фигурок накроют чётное количество (14) чёрных клеток. Каждая фигурка «Т» в свою очередь накрывает 3 или 1 чёрную клетку, т.е. нечётное количество, значит, 7 фигурок накроют нечётное количество черных клеток, что противоречит чётности количества чёрных клеток в фигурках «Г».

5. На столе лежат три кучки по 2021 камню в каждой. 2 игрока ходят по очереди. За один ход можно либо взять камень из какой-либо кучи с наименьшим числом камней, либо уравнять по числу камней какую-либо кучу с не наименьшим числом камней с наименьшей. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

<u>Ответ</u>: Выиграет первый. ***<u>Решение</u>:*** Сначала первый всё время должен ходить так, чтобы после его хода в наименьшей куче было чётное число камней, а две другие кучи были одинаковыми. После первого его хода это случится само собой, а затем если второй берёт камень из наименьшей кучи, то первый должен сделать то же самое (это возможно, поскольку второй оставил в наименьшей куче нечётное число камней), а если второй уравнял одну из куч с наименьшей, то первый должен уравнять с наименьшей оставшуюся кучу. Когда после хода первого одна из куч исчезнет, в двух оставшихся кучах будет поровну камней, и оставшиеся ходы первый должен делать симметрично ходам второго игрока: если второй взял камень из одной кучки, то первый берёт камень из другой. Тогда при такой игре последний камень достанется первому.