XVII Всероссийская смена «Юный математик»
Личная олимпиада. 12.09.2021.
8 класс

1. 10 команд играют турнир. В некоторый момент оказалось, что любые две команды сыграли между собой не более, чем по одному разу, только "Спартак" и "Динамо" сыграли дважды. Могло ли так случиться, что в этот момент все команды сыграли различное число игр?

Ответ: Нет. ***Решение:*** Допустим, есть команда, не сыгравшая ни одного матча. Тогда каждая из оставшихся команд сыграла не больше 9 матчей: с каждой из остальных восьми плюс один повторный. Получается 9 возможностей (1, 2, …, 9 матчей) на 19 команд. Но тогда эти команды вместе сыграли (1+2+…+9)/2 = 22,5 матчей, что невозможно.
Теперь допустим, что каждая команда сыграла хотя бы один матч. Тогда для числа сыгранных матчей получается 10 возможностей (1, 2, …, 10 матчей) на 10 команд. Но тогда эти команды вместе сыграли (1+2+…+10)/2 = 27,5 матчей, что также невозможно.

2. Для положительных *a* и *b* выполняется равенство $a+b=a^2+b^2=a^3+b^3$. Докажите, что *a*=*b*=1.

Доказательство 1: $0=a+b-2(a^2+b^2)+a^3+b^3=a(a-1)^2+b(b-1)^2$. Откуда при положительных числах и получаем, что оба числа равны 1.

Доказательство 2: Из формулы суммы кубов $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ и равенства $a+b=a^3+b^3$ при положительных числах следует, что $a^2-ab+b^2=1$. Тогда с учётом равенства $a+b=a^2+b^2$ получим, что $a+b-ab=1$. Переносим всё в правую часть и раскладываем на множители $0=ab-a-b+1=(a-1)(b-1)$, откуда и следует, что одно из чисел a или b равно 1. После подстановки этого значения в исходное равенство найдём, что и второе число также равно 1.

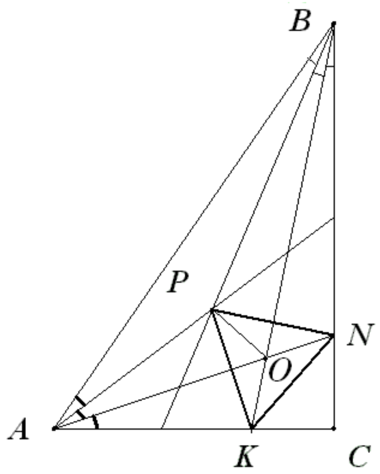
3. Четвероклассник Вася, любящий решать задачи по теории чисел с помощью компьютерных алгоритмов, попытался решить ребус $\overline{ДВА}+\overline{ТРИ}=\overline{ПЯТЬ}$ (*разные буквы – разные цифры, одинаковые буквы – одинаковые цифры*). Компьютер выдал 214 решений. Докажите, что программа работает неправильно.

***Решение*:** Все решения ребуса разбиваются на четвёрки, отличающиеся друг от друга перестановкой четырьмя способами цифр в двух последних разрядах (единиц и десятков). Т.е., переставляя местами между собой цифры *В* и *Р*, *А* и *И*, мы будем получать другие решения ребуса, т.к. сумма чисел $\overline{ПЯТЬ}$ будет оставаться прежней. Значит, количество решений должно быть кратно 4, но 214 не делится на 4.

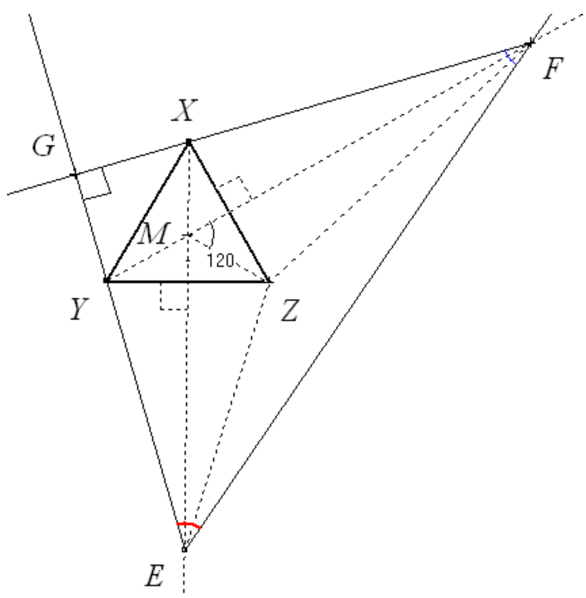
Комментарий: *Странное число 214 (а не 2014) подсказывает обратить на себя особое внимание. Что интересного в нём? На 2 делится, а на 4 нет, что и даёт нам идею доказательства. Кроме того, подсказка заложена в номере класса Васи (4-й, а не 8-й). Реальное же количество решений ребуса как раз будет в районе 200. Можете попробовать написать программу и узнать самостоятельно точное количество решений этого ребуса:* ☺.

4. В прямоугольном треугольнике *ABC* проведены трисектрисы острых углов, причём *AN* и *BK* – дальние от гипотенузы *AB* трисектрисы, а две ближние к гипотенузе трисектрисы пересекаются в точке *P* (трисектрисы делят угол на три равные части, точки *N* и *K* лежат на сторонах треугольника). Докажите, что треугольник *PNK* – равносторонний.

***Доказательство 1 (подсчёт углов)*:** Введём O – точку пересечения трисектрис AN и BK. Пусть $\angle A=3\alpha$, $\angle B=3\beta$, тогда $3\alpha+3\beta=90°$ и $\alpha+\beta=30°$. Тогда $\angle AOB=180°-2\alpha-2\beta=180°-60°=120°$, а точка P в треугольнике AOB будет точкой пересечения биссектрис, значит, $\angle AOP=\angle BOP=60°$. Но и $\angle AOK=\angle BON=180°-\angle AOB=60°$. Тогда треугольники APO и AKO равны (по стороне и двум прилежащим углам). Аналогично равны треугольники BPO и BNO. Значит, $KO=OP=ON$. Кроме того, $\angle KOP=\angle PON=\angle NOK=120°$, следовательно, треугольники KOP, PON и NOK равны между собой. Значит, $KP=PN=NK$, т.е. PNK – равносторонний треугольник.



***Доказательство 2 (метод обратного хода)*:** Пусть $\angle A=3\alpha$, $\angle B=3\beta$, тогда $3\alpha+3\beta=90°$ и $\alpha+\beta=30°$. Рассмотрим произвольный правильный треугольник XYZ. Пусть M – центр правильного треугольника XYZ. Рассмотрим точку E пересечения биссектрисы XM угла YXZ и луча YE (см. рис.), такого, что $\angle ZYE=90°-\alpha$. Тогда $XYEZ$ – дельтоид, т.к. прямая XE – серединный перпендикуляр к отрезку YZ. Рассмотрим луч EF такой, что $\angle FEZ=\angle ZEX=\angle XEY=90°-\angle ZYE=90°-(90°-\alpha)=\alpha$, и луч YM, являющийся частью серединного перпендикуляра к XZ, которые пересекутся в точке F. Тогда Z – точка пересечения биссектрис EZ и MZ углов E и M в треугольнике EMF, значит, FZ – биссектриса угла F. Кроме того, $XYZF$ – дельтоид, т.к. прямая YF – серединный перпендикуляр к XZ. Значит, $\angle XFY = \angle YFZ= \angle ZFE = \angle MFE/2 = (180°-\angle EMF-\angle MEF)/2 = (180°-120°-2\alpha)/2 = 30°-\alpha=\beta$, тогда $\angle XFE=3\beta$. Пусть G – точка пересечения лучей EY и FX, тогда $\angle EGF=180°-3\alpha-3\beta=90°$, Значит, EFG – прямоугольный треугольник с $\angle E=3\alpha$., $\angle F=3\beta$, подобный прямоугольному треугольнику ABC, причём точки X, Y, Z соответствуют точкам N, K, P, значит, треугольник NKP подобен правильному треугольнику XYZ, т.е. является равносторонним, что и требовалось доказать.



5. Боря и Вова играют в следующую игру на изначально белой доске 8×8. Боря ходит первым и каждым своим ходом закрашивает в чёрный цвет любые четыре белые клетки. После каждого его хода Вова закрашивает полностью в белый цвет какой-нибудь ряд (строку или столбец). Боря стремится закрасить как можно больше клеток, а Вова стремится ему помешать. Какое наибольшее количество чёрных клеток может оказаться на доске после хода Бори?

Ответ*:** 25 клеток. ***Решение: Пусть Вова каждым своим ходом делает белым ряд с наибольшим количеством чёрных клеток. Тогда, как только Боря добьётся ряда из не менее чем четырёх чёрных клеток (такой ряд будем называть «*богатым*»), Вова будет удалять минимум четыре клетки, значит, следующим ходом Боря не сможет увеличить количество чёрных клеток в сравнении со своим предыдущим ходом. И далее при наличии богатых рядов Вова удаляет минимум 4 чёрных клетки, а Боря после этого добавляет четыре, значит, увеличить свой максимальный результат не сможет. При этом перед первым и всеми последующими моментами создания богатого ряда при их отсутствии на доске была максимум $7\cdot 3=21$ чёрная клетка – семь рядов по 3 чёрных клетки, т.к. только что Вова сделал белым ряд этого направления. Таким образом, Боря всегда создаёт конструкцию с максимум 25 чёрными клетками. Покажем теперь, что Боря может добиться 25 чёрных клеток. Выделим на доске 24 клетки так, как показано на рисунке, – по три в каждом ряду. Пусть Боря закрашивает всегда только клетки этого множества, пока среди них есть белые клетки. Тогда Вова сможет удалить максимум три чёрные клетки, значит, количество чёрных клеток после каждой пары их ходов будет хотя бы на одну больше. Значит, в некоторый момент Боря сможет сделать чёрными все эти клетки (и ещё, возможно, какие-то). Тогда после хода Вовы останется не менее 21 чёрной клетки, а Боря своим следующим ходом добьётся минимум 25 чёрных клеток. Значит, при правильной игре обоих максимальное количество чёрных клеток на доске будет равно 25.