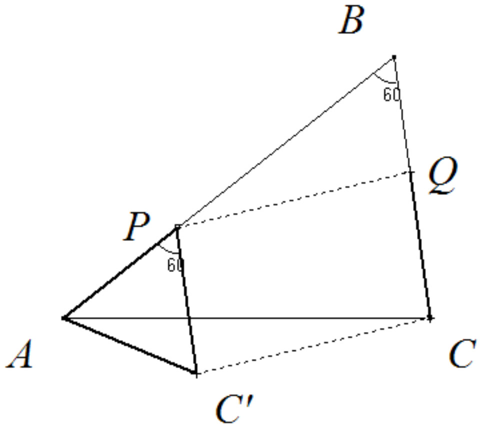
XVII Всероссийская смена «Юный математик»
Личная олимпиада. 12.09.2021.
9 класс

1. Какое наибольшее количество различных простых чисел можно выписать в ряд так, чтобы сумма любых четырёх подряд идущих чисел также оказалась простым числом?

Ответ: 7, например, подойдёт последовательность 7, 5, 3, 2, 13, 11, 17, где соответствующие суммы по четыре подряд идущих числа равны 17, 23, 29, 43. ***Доказательство оценки:*** Сумма четырёх простых чисел будет не меньше 8, значит, чтобы оказаться простой, она должна быть нечётной, следовательно, не может состоять только из нечётных простых чисел, т.е. обязана содержать 2. Но двойка может быть только одна, следовательно, в ряду не более 7 чисел (не более трёх – перед двойкой и не более трёх – после двойки). Если чисел будет ровно 7, то двойка должна стоять на четвёртом месте, что и даёт нам возможность построить нужный пример.



2. Про три действительных числа известно, что сумма любых двух из них отрицательна, а произведение любых двух больше 1. Докажите, что сумма всех трех меньше, чем (–3).

Решение: Если произведение двух чисел положительно, а сумма отрицательна, то оба числа отрицательны. Следовательно, все три данных числа отрицательны. Если произведение двух чисел больше 1, то хотя бы одно из них по модулю больше 1. Поэтому одно из данных чисел меньше –1. Обозначим его через x, а два других — через y и z. Заметим, что $|y|+|z| \geq 2\sqrt{yz} > 2$, откуда $y+z < -2$ и $x+y+z < -3$. Замечание. Неравенство $|y|+|z| > 2$ можно доказать и по-другому: взять то из чисел y и z, которое меньше –1 (пусть это y), уменьшить модуль второго до $1/|y|$ и воспользоваться неравенством $|y|+|z| > |y|+1/|y| \geq 2$.

3. На окружности отмечено 20 точек и проведен 21 соединяющий их отрезок. Докажите, что из этих отрезков можно выбрать три, составляющие несамопересекающуюся ломаную.

Решение: Если среди наших точек есть такая, из которой выходит не больше одного отрезка, удалим ее вместе с отрезком и будем так делать до тех пор, пока есть такие точки. Отрезков при этом всегда будет оставаться больше, чем точек. Поскольку трех точек с четырьмя отрезками не бывает, в какой-то момент у нас возникнет ситуация, когда из каждой точки выходит не меньше двух отрезков, и есть точка A, из которой выходит не меньше трех отрезков (иначе отрезков не больше, чем точек). Пусть AB, AC и AD — три выходящих из нее отрезка, причем луч AC лежит внутри угла BAD. Рассмотрим второй отрезок CE, выходящий из точки C. С одной из точек B и D он лежит по разные стороны от прямой AC. Если это B, искомой будет ломаная $BACE$, а если D — ломаная $DACE$.

4. В треугольнике ABC $\angle B=60°$. На сторонах AB и BC нашлись такие точки P и Q соответственно, что $AP=CQ$ и $AP+PQ=AC$. Докажите, что треугольник ABC – равносторонний.

Доказательство: Построим отрезок PC', равный и параллельный отрезку QC, так, что $C'PQC$ – параллелограмм. Тогда, из параллельности, следует, что $\angle APC'=\angle ABC=60°$ и $AP=CQ=C'P$. Следовательно, треугольник APC' – равносторонний, откуда $AC'=AP$. Но тогда $AC=AP+PQ=AC'+C'C\geq AC$ по неравенству треугольника. Следовательно, в силу равенства левой и правой частей полученного неравенства точка C' лежит между A и C, значит, $\angle BAC=\angle PAC'=60°$, т.е. в треугольнике ABC уже два угла равны 60°, значит, и все три угла равны 60°, тогда он – равносторонний.

5. На шахматной доске стоят 64 ладьи, по 2 штуки каждого из 32-х цветов. Докажите, что можно убрать 56 ладей и оставить на доске ровно 8 ладей 8-ми различных цветов так, чтобы ладьи не били друг друга.

***Решение*:** Будем считать, что цвета пронумерованы, а на каждой клетке написан номер цвета ладьи, занимающей эту клетку. Известно, что на шахматную доску 8×8 можно поставить 8 ладей, не бьющих друг друга, $8!=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=40320$ способами, так как в первую вертикаль ладью можно поставить 8-ю способами, во вторую – уже 7-ю и т.д. в последнюю – 1-м способом. А теперь посмотрим, сколько из этих расстановок нам могут не подойти. Расстановка не подходит, если какие-то две ладьи оказались на клетках с одним и тем же числом (номером цвета от 1 до 32). При этом если эти одинаковые числа оказались в одном ряду, то они нам не «портят» ни одного способа. А вот если занятые ими две клетки оказались в разных строках и столбцах, то они как бы «портят» нам $6!=120$ способов, потому что оставшиеся 6 ладей размещаются на «доске 6×6», получающейся выбрасыванием по паре соответствующих строк и столбцов. Таким образом, каждый из 32 цветов-чисел может нам «испортить» 0 или $6!$ способов расстановки 8 ладей, при этом какие-то способы могут быть «испорчены» сразу несколькими разными числами. Но в любом случае в сумме мы теряем не более $32\cdot6!=23040$ способов. Значит, существует не менее $40320–23040=17280$ способов расстановки на доске 8 ладей, не бьющих друг друга, при которых ладьи встают на 8 различных числах, т.е. это 8 ладей 8-ми различных цветов, не бьющие друг друга.