XVIII ВСЕРОССИЙСКАЯ СМЕНА
«Юный математик»
Задания конкурсного отбора
30 апреля 2022

9-10 класс

1. Даны 6 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое двух наименьших равно 5, среднее арифметическое двух наибольших равно 22. Какое наибольшее значение может принимать среднее арифметическое всех 6 чисел?

2. Квадратные трёхчлены P и Q таковы, что их старшие коэффициенты равны 2 и -2 соответственно и их графики проходят через точки $(16, 54)$ и $(20, 53)$. Найдите значение выражения $P(0) + Q(0)$.

3. Найдите все тройки действительных чисел (a, b, c) для которых выполняются равенства

$$ab + bc + ca = 1,\ a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

4. В треугольнике ABC $(AC \neq BC)$ точки I and O – центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках D и E соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и CDE пересекаются в точках C и P. Докажите, что точка пересечения прямых CO и PI лежит на описанной окружности треугольника ABC.

5. На доске записано некоторое натуральное число, большее 1. На каждом шаге Игорь заменяет имеющееся на доске число n на число $n+\frac{n}{p}$, где p – какой-нибудь простой делитель числа n. Докажите, что если Игорь будет продолжать переписывать число бесконечно долго, то он бесконечно много раз выберет в качестве простого делителя p число 3.

6. Дано множество $M = \{-2^{2022}, -2^{2021}, ..., -2^2, -2, -1, 1, 2, 2^2, ..., 2^{2021}, 2^{2022}\}$. Пусть T – подмножество M, такое что если элементы в нем упорядочить по возрастанию, то соседние числа будут иметь одинаковую разность.

а) Определите максимальное количество элементов, которое может содержать такое множество T.

б) Определите все множества T с максимальным числом элементов.

7. Найдите количество перестановок $a_1, ..., a_n$ чисел $1, 2, ..., n$ таких, что $1 \cdot a_1 \leq 2 \cdot a_2 \leq ... \leq n \cdot a_n$.

8. В треугольнике ABC $AB > AC$ и M – середина BC. Прямая AM вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D. Описанная окружность треугольника BMD пересекает отрезок AB в точках B и E. Описанная окружность треугольника AEM пересекает отрезок AC в точках A и F. Описанная окружность треугольника BFC пересекает отрезок AB в точках B и G. Прямая FG вторично пересекает описанную окружность треугольника AEM в точке H. Докажите, что $HEMG$ – параллелограмм.