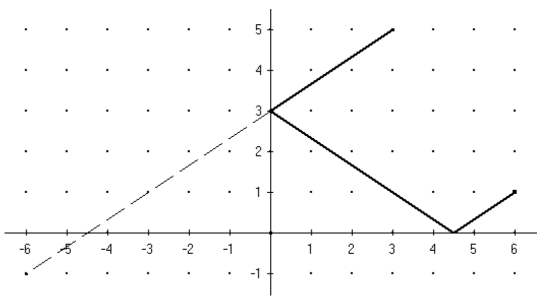
XVIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». XV Турнир математических игр.
Игра «Домино». ***Младшая лига (7-8 класс).*** **Решения. 09.09.2022.**

0–0. В последовательности целых чисел $\{a_n\}$ первый член равен $2^{2022}+2^{2021}$, а при $n \geq 1$ член a_{n+1} равен a_n-1, если a_n чётно, и $(a_n-1)/2$, если a_n нечётно. Найдите номер первого неположительного члена этой последовательности. **(<u>2025</u>. $a_1=2^{2022}+2^{2021}$ – чётно, $a_2=2^{2022}+2^{2021}-1$ – нечётно, $a_3=2^{2021}+2^{2020}-1$ – нечётно и т.д., $a_{2022}=2^2+2^1-1=5$ – нечётно, $a_{2023}=2$, $a_{2024}=1$, $a_{2025}=0$ – первый неположительный член последовательности.)**

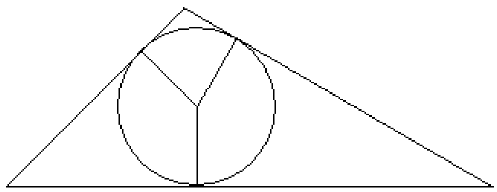
0–1. Сколько существует различных прямоугольников с целочисленными сторонами и периметром 2022? **(<u>505</u>. Сумма двух целочисленных сторон прямоугольника равна 1011, значит, меньшая из сторон принимает [1011:2]=505 значений.)**

0–2. В строку записаны четыре натуральных числа. Среднее арифметическое первых двух равно 21, среднее двух средних равно 26, среднее последних двух равно 30. Сколько четвёрок обладают таким свойством? **(<u>41</u>. Если первое число равно *n*, то остальные числа равны соответственно 42–*n*, 10+*n*, 50–*n*, откуда допустимыми значениями для *n* будут все натуральные числа от 1 до 41 – всего 41 четвёрка.)**

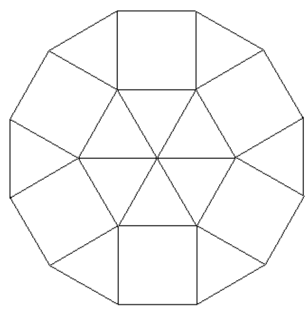
0–3. Луч лазера движется по прямой линии и отражается от ровной поверхности под тем же углом, под которым на неё падает. Луч вышел из лазера, находящегося в точке (3; 5) координатной плоскости *xoy*, отразился от прямого зеркала, расположенного вдоль оси ординат, затем – от такого же зеркала, расположенного вдоль оси абсцисс, после чего попал в датчик, расположенный в точке (6; 1). Какое расстояние он преодолел? **($\sqrt{117}=\sqrt{(3-(-6))^2+(5-(-1))^2}$, т.к. если луч распрямить, то фактически он прошёл от точки (3; 5) до точки (–6; –1) – см. рис.)**



0–4. Точки касания вписанной окружности треугольника делят эту окружность на дуги с соотношением угловых мер дуг 5:9:10. Найдите наибольший угол треугольника. **(<u>105º</u>. Найдём получившиеся дуги (75º, 135º и 150º), которые составляют 5, 9 и 10 частей из 24 частей полного оборота в 360º. Углы треугольника дополняют их до 180°. Тогда наибольший угол треугольника равен 180º–75º=105º.)**



0–5. Из квадратов со стороной 1 и правильных треугольников со стороной 1 сложили (без наложений) выпуклый *n*-угольник. Какое наибольшее количество сторон может у него быть? **(<u>12</u> – см. рис. Возьмём правильный шестиугольник со стороной 1, который разрежем на 6 правильных треугольников. Затем на каждой стороне во внешнюю сторону построим единичный квадрат, между которыми образуются зазоры в 60°, в которые вставляем правильные единичные треугольники. *<u>Доказательство оценки:</u>* Углы требуемого выпуклого *n*-угольника могут быть равны 60°, 90°, 60°+60°=120° и 60°+90°=150°, значит, каждый внешний угол при вершинах многоугольника будет не меньше 180°–150°=30°. Вся сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°, значит, всего углов не больше 360°:30°=12. *<u>Комментарий</u>*: *Типичная ситуация, когда надо воспользоваться суммой внешних углов многоугольника.*)**



0–6. За один ход в натуральном числе можно либо переставить две соседние цифры местами, либо изменить одну из цифр на 1. За какое наименьшее количество ходов можно из числа 87654321 получить число 12345678? **(<u>28 ходов</u>, поочерёдно перегоняя цифры с конца в начало, поменяв местами любую из $C_8^2=\frac{8\cdot 7}{2}=28$ пар цифр. Две цифры образуют инверсию (непорядок), если большая цифра стоит левее меньшей. Всего у нас изначально 28 инверсий (в каждой паре цифр). Перестановка местами соседних (стоящих рядом) цифр меняет число инверсий на одну, изменение одной из цифр на 1 либо сохраняет число инверсий (приравнивание к другой цифре будем считать сохранением состояния между цифрами – была или нет инверсия), либо изменяет их количество на одну. Значит, для перехода от 28 изначальных инвер-**

сий к 0 инверсий в конечном числе надо не менее 28 ходов, причём каждый ход должен уменьшать число инверсий на одну, а это будет только при перестановках (транспозициях) соседних цифр.)

1–1. В треугольнике длины двух сторон равны 1011 и 2022. Сколько целых значений может принимать длина третьей стороны? **(2021, т.к. третья сторона *n* должна удовлетворять двойному неравенству 2022–1011<*n*<2022+1011)**

1–2. Сколько существует решений у ребуса О·Р·Л·Ё·Н·О·К=18·С·М·Е·Н·А? (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*) **(9!=362880 решений, т.к. использованы 10 цифр, одна из которых обязательно 0, но это может быть только Н, которая участвует в обоих произведениях, равных 0, а остальные ненулевые цифры можно расставить по 9 буквам 9! способами)**

1–3. При каком наименьшем *N* число C_N^K равно 1001? Укажите при этом ещё и *K*. **(*N*=14 и** $C_{14}^4=C_{14}^{10}=\dfrac{14!}{4!\cdot 10!}=\dfrac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4!}=1001$. **Раньше, чем при *N*=13 число 1001, кратное простому числу 13, появиться не могло, но ни одно число сочетаний из 13 по *k* не равно 1001.)**

1–4. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4. Разрешается взять любые два имеющихся на доске числа *a* и *b*, приписать слева к числу *b* число *a*, уменьшить или увеличить результат на единицу и записать на доску число, получившееся в итоге, вместо чисел *a* и *b*. Например, вместо чисел 1 и 2 можно записать 11, 13, 20 или 22. Как оставить на доске одно число, являющееся точным квадратом? **(например, 21→20, 203→202, 2024→ 2025=45^2)**

1–5. Найдите наибольшее девятизначное число из различных цифр, которое не делится на сумму своих цифр, и при этом никакой перестановкой местами двух его цифр нельзя получить число, кратное сумме цифр. **(987654320. Если в числе нет 0, то сумма цифр будет равна 45, число не может оканчиваться на 5, но перестановка 5 с последней цифрой даёт число, кратное 45=5·9 (по признакам делимости на 5 и 9). Число 987654320 – наибольшее число, в котором есть 0, его сумма цифр равна 44=4·11, знакочередующаяся сумма цифр сравнима с 4 (mod 11), Единственной перестановкой двух цифр, дающей 0 (mod 11), будет 987654302, которая не даёт делимости на 4, значит, и на 44.)**

1–6. На командный математический турнир нужно в классе собрать команду из 5 или 6 человек, назначив при этом капитана команды и его заместителя. Сколько учеников в классе, если количество способов создания такой команды равно 210210? **(15. После выбора *N* и (*N*–1) способами капитана и зама (из *N* учеников) надо выбрать ещё 4 человек среди *N*-2 оставшихся и одного "новичка», который то ли успеет, то ли не успеет подать документы в школу до начала турнира, а это число равно** $C_{N-1}^4=\dfrac{(N-1)!}{4!\cdot(N-5)!}$. **Получающаяся величина** $N(N-1)\cdot\dfrac{(N-1)!}{4!\cdot(N-5)!}$ **растёт с ростом *N* и принимает значение 210210 при *N*=15. *Комментарий: Предъявленное автором рассуждение, к сожалению, отражает неблагоприятную ситуацию, сложившуюся в последнее время.*)**

2–2. Представьте число 2022 как разность двух *палиндромов* двумя различными способами. (*Палиндромы* – это целые неотрицательные числа, не меняющиеся при прочтении справа налево, например, 0, 717, 2002.) **(например, 2022=11911–9889=12021–9999)**

2–3. Какое наименьшее количество выстрелов надо сделать одновременно по клеткам поля 10×10, чтобы гарантированно попасть в неизвестно где расположенный «авианосец» в виде четырёхклеточной буквы «Г»? **(33 выстрела – см. пример на рис.1 – стреляем в клетки под номером 3 при диагональной раскраске в 3 цвета. В каждый прямоугольник 2×3 надо сделать хотя бы 2 выстрела, иначе в нём можно разместить «авианосец», в который мы не попадём. Всё поле 10×10 разбивается на 16 прямоугольников 2×3 и одну фигуру «Г» (см. рис.2), в которую также надо выстрелить, значит, нам надо не менее 16·2+1=33 выстрелов.)**

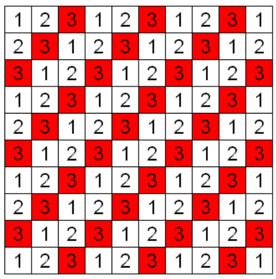


рис.1

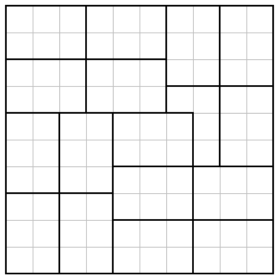
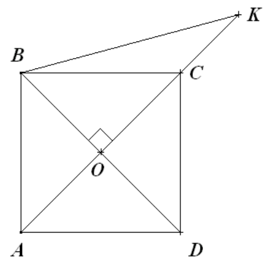


рис. 2

2–4. Первая цифра четырёхзначного числа равна остатку от деления этого числа на 2, вторая — остатку от деления этого числа на 3, третья — остатку от деления этого числа на 4, четвёртая — остатку от деления этого числа на 5. Найдите все такие числа? (**Их нет. Это число может начи-**

наться только на 1, значит, оно нечётное, тогда последняя цифра равна 1 или 3, третья – также 1 или 3, но ни один из вариантов последних двух цифр 11, 13, 31, 33 не даст нужную нам в начале каждой пары цифру, равную остатку при делении на 4.)

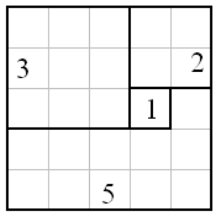
2–5. Дан единичный квадрат *ABCD*. На продолжении диагонали *AC* за точку *C* отмечена такая точка *K*, что $\angle BKC$=30°. Найдите длину отрезка *KC*. (<u>$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$</u>**. Пусть *O* – центр квадрата, тогда в прямоугольном треугольнике *OBK* с углами 90-60-30 гипотенуза *BK*=2·*BO*=*AC*=$\sqrt{2}$,** $KO=\sqrt{3}\cdot BO=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, $KC=KO-CO=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$ **.)**



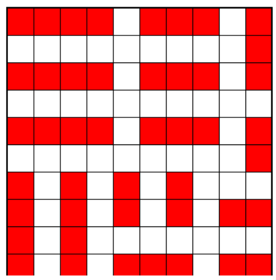
2–6. Каждая клетка таблицы 7×8 окрашена в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. При этом в каждой из 7 строк таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зелёных клеток, а в каждом из 8 столбцов таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зелёных клеток. Какое наибольшее количество трёхцветных рядов (строк и столбцов в сумме) могло оказаться? **(<u>12</u>. Из 7 клеток в столбце не менее трети будут синими, т.е. не менее трёх, значит, синих клеток будет не меньше 8·3=24, при этом синих клеток будет не меньше, чем красных. В каждой строке красных клеток не меньше, чем синих, значит, и в сумме красных клеток будет не меньше, чем синих, т.е. красных и синих клеток поровну, причём и в каждой строке, и в каждом столбце красных и синих клеток поровну, а в сумме не меньше 2·24=48, значит, зелёных клеток не больше 7·8−48=8. В каждой строке и каждом столбце должно быть в сумме чётное количество красных и синих клеток, не меньшее 6, значит, в каждом столбце ровно 1 зелёная клетка, а в каждой строке 0 или 2 зелёных клетки. Следовательно, будет ровно 8 зелёных клеток по одной в каждом столбце, и по две ровно в 4 строках, т.е. всего 8+4=12 трёхцветных рядов. Пример – см. на рисунке.)**

К	К	К	С	С	С	С	К
К	К	К	С	С	С	С	К
К	К	К	С	С	С	К	С
С	С	С	К	К	К	З	З
С	С	С	К	З	З	К	К
С	С	З	З	К	К	К	С
З	З	С	К	К	К	С	С

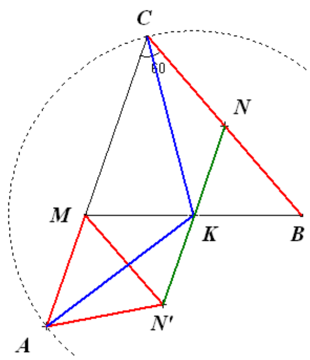
3–3. Имеются четыре кубика с рёбрами 1 см, 2 см, 3 см и 5 см. Какую наименьшую площадь поверхности может иметь многогранник, собранный из всех этих кубиков? Кубики можно ставить друг на друга гранями. Фигура не должна распадаться на несколько не связанных между собой частей. **(<u>194 см^2</u>. Суммарная поверхность всех кубиков равна 6·(1+4+9+25)=234 см^2, терять её можно только за счёт состыковки двух кубиков, причём максимальная потеря площади будет, если каждый меньший кубик будет контактировать с каждым большим по целой грани меньшего (причём такую потерю считаем дважды – для каждого кубика), т.е. максимальная потеря площади равна 2·(3·1+2·4+9)=40. Причём такой пример очевидным образом строится – см. вид сверху, когда все меньшие кубики лежат на кубике со стороной 5 см и соприкасаются межу собой.)**



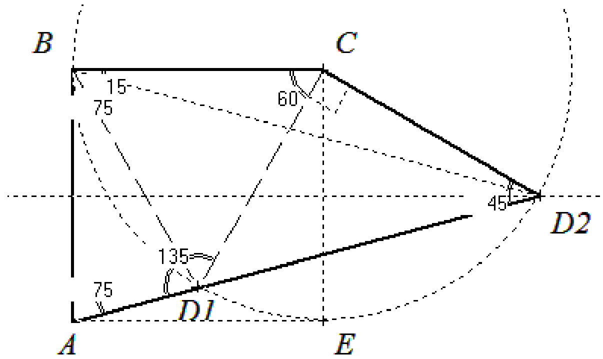
3–4. При каком наибольшем *N* на поле 10×10 можно расставить по *N* кораблей 1×4, 1×3 и 1×2? Корабли между собой не соприкасаются. *Приведите ответ и пример.* **(<u>5</u>. Узлы – точки на пересечении линий сетки. Корабль 1×4 занимает 10 своих узлов, 1×3 – 8, 1×2 – 6 (узлы не могут принадлежать разным кораблям, т.к. корабли не соприкасаются). Тогда суммарное количество всех узлов кораблей *N*·(10+8+6)=24*N* не превосходит количества всех узлов на поле, а их 11·11=121. Значит, 24*N*≤121, откуда *N*≤5. Пример на *N*=5 см. рис.)**



3–5. Точка *N* – середина стороны *BC* треугольника *ABC*, точка *M* на стороне *AC* такова, что *AM*=*BN*. Середина *K* отрезка *BM* равноудалена от точек *A* и *C*. Какие значения может принимать угол *ACB*? **(<u>60°</u>. Воспользуемся методом «параллельных палочек», отобразив *N* относительно *K* (см. рис.). Тогда *ACNN'* – трапеция, в которой середина *K* основания *NN'* равноудалена от концов основания *AC*, значит, это равнобочная трапеция. Тогда треугольник *AMN'* должен быть равносторонним, а $\angle$*ACB*=$\angle$*CAN'*=60°.)**

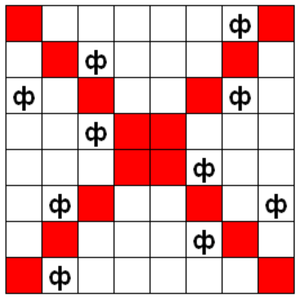


3–6. Петя расставляет в ряд девять карточек с цифрами от 1 до 9 (каждая цифра ровно на одной карточке) в произвольном порядке, после этого находит сумму всевозможных двузначных чисел, составленных из двух цифр, стоящих рядом. Какое значение могла принимать цифра на второй слева карточке, если известно, что полученная Петей сумма равна 480? (**<u>9, 8, 7, 6, 4, 3, 2</u>. Если расписать данную сумму по разрядам, то получим 11·(a_2+a_3+…+a_8)+10a_1+a_9 и согласно транснеравенству наибольшее значение будет равно 11·(9+8+…+3)+10·2+1=483, а значение 480 можно получить, только поменяв местами 2 и 5, т.е. при a_1=5, а 2 стоит на одном из мест со второго по восьмое. Значит, цифра a_2 принимает одно из 7 значений (9, 8, 7, 6, 4, 3, 2).)**



4–4. Найдите угол *ADC* выпуклого четырёхугольника *ABCD*, в котором ∠*ABC*=90°, ∠*DAB*=75° и *AB*=*BC*=*CD*. (**<u>45° или 135°</u>, что нетрудно показать при «идеальном построении» – см. чертёж)**

4–5. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ферзей можно поставить на шахматную доску без двух главных диагоналей? *Через дырку ферзь не бьёт. Приведите ответ и пример.* (**<u>10</u>, см. рис. методом пропеллера. Каждая из 4 зон по краям состоит из 3 рядов одного направления, в каждый из которых можно поставить максимум одного ферзя, значит, в зоне может стоять максимум 3 ферзя, причём расстановка с точностью до симметрии единственная (см. левую зону на рисунке. Но при трёх ферзях в одной зоне в соседних зонах уже не может быть трёх ферзей, что проверяется небольшим перебором. Значит, всего ферзей не более 2·3+2·2=10.)**



4–6. На столе стоят 20 одинаковых с виду гирь, по одной гире весом 21 г, 22 г, 23 г, …, 40 г, из которых 19 чёрных и 1 белая. Также есть неточные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть по одной гире, и весы покажут, какая тяжелее, но только если разность весов этих гирь превышает восемь граммов. Петя взвесил каждую чёрную гирю с каждой чёрной гирей по одному разу и обнаружил, что ровно в 56 случаях весы были не в равновесии. Сколько весит белая гиря? (**<u>22 или 39</u>. Если бы каждую гирю взвесили с каждой, то неравенство чаш получили бы ровно 11+10+…+1=66 раз. Петя же получил на 10 неравенств меньше, значит, белой будет гиря, которая участвует ровно в 10 таких неравенствах, а это либо 22 г (10 раз проиграет), либо 39 г (10 раз выиграет).)**

5–5. Каждую сторону и диагональ правильного пятиугольника *ABCDE* красят либо в синий, либо в красный цвет. Сколько существует способов сделать такую раскраску, чтобы нашёлся хотя бы один треугольник с вершинами в вершинах исходного пятиугольника, все стороны которого покрашены в один цвет? (**<u>1012</u>=2^{10}–12, т.к. треугольника не будет только в случае, когда синие и красные отрезки будут образовывать циклы длины 5, а таких циклов ровно 4!:2=12.)**

5–6. Про двузначное число *n*>10 известно, что числа 10+*k* и *n*+*k* взаимно просты при всех натуральных *k* от 1 до *n*–10. Найдите все такие *n*. (**<u>11</u>. Предположим, что *d*=*n*–10≥2, тогда среди натуральных чисел 10+1, 10+2, …, 10+*d* найдётся ровно одно число (10+*t*), делящееся на *d*, значит, и *n*+*t* = (*n*–10)+(10+*t*)=*d*+(10+*t*) также делится на *d*>1, т.е. числа 10+*t* и *n*+*t* не будут взаимно просты. Противоречие, значит, наше предположение неверно и *d*=*n*–10=1.)**

6–6. Пусть *N* – количество способов поставить на шахматную доску 3 белых, 3 синих, 3 красных и 5 зелёных слонов так, чтобы никакие два слона не били друг друга. На какую наибольшую степень двойки делится *N*? (**<u>13</u>. Всего существует 2^8 способов поставить на шахматную доску 3+3+3+5=14 слонов, не бьющих друг друга, что доказывается с помощью разбиения доски на 7 чёрных и 7 белых диагоналей. Затем существует**

$$P(3,3,3,5)=\frac{14!}{3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 5!}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2^3\cdot 3^3}=2^5\cdot n$$

способов (где *n* – нечётное) раскрасить слонов в нужный набор цветов, откуда следует, что *N*=2^8·*P*(3, 3, 4, 4) содержит 13=8+5 двоек.)