XVIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». XV Турнир математических игр.
Игра «Домино»**.** ***Старшая и средняя лиги (9-11 класс).*** **Решения. 09.09.2022.**

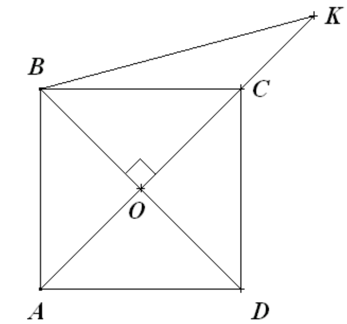
0–0. Сумма квадратов 100 различных целых чисел равна 83449. Найдите сумму этих 100 чисел. **(49 или (-49). $83449=2\cdot(1^2+2^2+\ldots+48^2)+49^2+2\cdot50^2+0^2$ – сумма квадратов набора целых чисел (-50, -48, -47, …, -1, 0, 1, 2, …, 47, 48, 50) и либо 49, либо (-49). Это следующая по величине после самой маленькой суммы квадратов $83350=2\cdot(1^2+2^2+\ldots+49^2)+50^2+0^2$. Тогда сумма наших 100 чисел равна либо 49, либо (-49).)**

0–1. Какое наименьшее значение может принимать выражение $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2022$ при действительном значении x? **(2021. Пусть $x+2{,}5=a$, тогда наше выражение примет вид $(a-1{,}5)(a-0{,}5)(a+0{,}5)(a+1{,}5)+2022=(a^2-1{,}5^2)(a^2-0{,}5^2)+2022=(a^4-2{,}5a^2+9/16)+2022=(a^2-5/4)^2+2021$, что не меньше 2021, причём минимум достигается при $(x+2{,}5)^2=5/4$, а такое x существует.)**

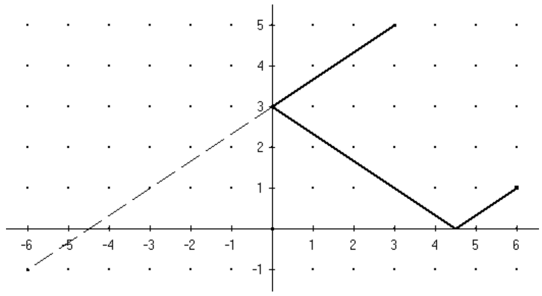
0–2. Дан единичный квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $\angle BKC=30°$. Найдите длину отрезка KC. **($\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$. Пусть O – центр квадрата, тогда в прямоугольном треугольнике OBK с углами 90-60-30 гипотенуза $BK=2\cdot BO=AC=\sqrt{2}$,**

$$KO=\sqrt{3}\cdot BO=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$KC=KO-CO=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}.)$$

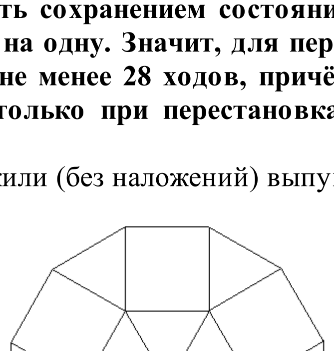


0–3. Луч лазера движется по прямой линии и отражается от ровной поверхности под тем же углом, под которым на неё падает. Луч вышел из лазера, находящегося в точке (3; 5) координатной плоскости xoy, отразился от прямого зеркала, расположенного вдоль оси ординат, затем – от такого же зеркала, расположенного вдоль оси абсцисс, после чего попал в датчик, расположенный в точке (6; 1). Какое расстояние он преодолел? **($\sqrt{117}=\sqrt{(3-(-6))^2+(5-(-1))^2}$, т.к. если луч распрямить, то фактически он прошёл от точки (3; 5) до точки (–6; –1) – см. рис.)**



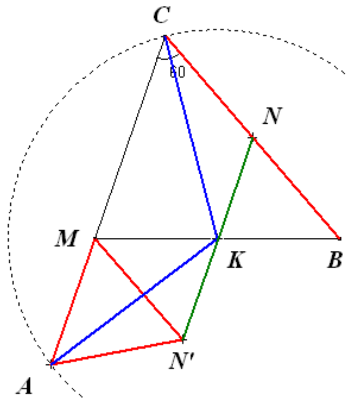
0–4. За один ход в натуральном числе можно либо переставить две соседние цифры местами, либо изменить одну из цифр на 1. За какое наименьшее количество ходов можно из числа 87654321 получить число 12345678? **(28 ходов, поочерёдно перегоняя цифры с конца в начало, поменяв местами любую из $C_8^2=\dfrac{8\cdot7}{2}=28$ пар цифр. Две цифры образуют инверсию (непорядок), если большая цифра стоит левее меньшей. Всего у нас изначально 28 инверсий (в каждой паре цифр). Перестановка местами соседних (стоящих рядом) цифр меняет число инверсий на одну, изменение одной из цифр на 1 либо сохраняет число инверсий (приравнивание к другой цифре будем считать сохранением состояния между цифрами – была или нет инверсия), либо изменяет их количество на одну. Значит, для перехода от 28 изначальных инверсий к 0 инверсий в конечном числе надо не менее 28 ходов, причём каждый ход должен уменьшать число инверсий на одну, а это будет только при перестановках (транспозициях) соседних цифр.)**

0–5. Из квадратов со стороной 1 и правильных треугольников со стороной 1 сложили (без наложений) выпуклый n-угольник. Какое наибольшее количество сторон может у него быть? **(12 – см. рис. Возьмём правильный шестиугольник со стороной 1, который разрежем на 6 правильных треугольников. Затем на каждой стороне во внешнюю сторону построим единичный квадрат, между которыми образуются зазоры в 60°, в которые вставляем правильные единичные треугольники. *Доказательство оценки:* Углы требуемого выпуклого n-угольника могут быть равны 60°, 90°, 60°+60°=120° и 60°+90°=150°, значит, каждый внешний угол при вершинах многоугольника будет не меньше 180°–150°=30°. Вся сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°, значит, всего углов не больше 360°:30°=12. *Комментарий*: *Типичная ситуация, когда надо воспользоваться суммой внешних углов многоугольника.*)**



0–6. Точка N – середина стороны BC треугольника ABC, точка M на стороне AC такова, что $AM=BN$. Середина K отрезка BM равноудалена от точек A и C. Какие значения может принимать угол ACB? **(60°. Воспользуемся методом «параллельных палочек», отобразив N относительно K (см. рис.). Тогда $ACNN'$ – тра-**

пеция, в которой середина K основания NN' равноудалена от концов основания AC, значит, это равнобочная трапеция. Тогда треугольник AMN' должен быть равносторонним, а $\angle ACB=\angle CAN'=60°$.)



1–1. При каком наименьшем N число C_N^K равно 1001? Укажите при этом ещё и K. (**<u>N=14 и</u>** $C_{14}^4=C_{14}^{10}=\dfrac{14!}{4!\cdot 10!}=\dfrac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4!}=1001$. **Раньше, чем при N=13 число 1001, кратное простому числу 13, появиться не могло, но ни одно число сочетаний из 13 по k не равно 1001.)**

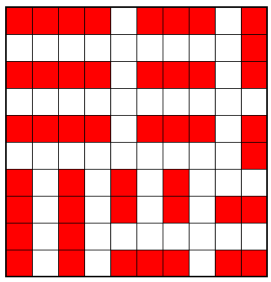
1–2. Сколько существует решений у ребуса О·Р·Л·Ё·Н·О·К=18·С·М·Е·Н·А? (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*) (**<u>9!=362880</u> решений, т.к. использованы 10 цифр, одна из которых обязательно 0, но это может быть только Н, которая участвует в обоих произведениях, равных 0, а остальные ненулевые цифры можно расставить по 9 буквам 9! способами)**

1–3. Найдите наибольшее девятизначное число из различных цифр, которое не делится на сумму своих цифр, и при этом никакой перестановкой местами двух его цифр нельзя получить число, кратное сумме цифр. (**<u>987654320</u>. Если в числе нет 0, то сумма цифр будет равна 45, число не может оканчиваться на 5, но перестановка 5 с последней цифрой даёт число, кратное 45=5·9 (по признакам делимости на 5 и 9). Число 987654320 – наибольшее число, в котором есть 0, его сумма цифр равна 44=4·11, знакочередующаяся сумма цифр сравнима с 4 (mod 11), Единственной перестановкой двух цифр, дающей 0 (mod 11), будет 987654302, которая не даёт делимости на 4, значит, и на 44.)**

1–4. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4. Разрешается взять любые два имеющихся на доске числа a и b, приписать слева к числу b число a, уменьшить или увеличить результат на единицу и записать на доску число, получившееся в итоге, вместо чисел a и b. Например, вместо чисел 1 и 2 можно записать 11, 13, 20 или 22. Как оставить на доске одно число, являющееся точным квадратом? (**<u>например, 21→20, 203→202, 2024→ 2025=45²</u>)**

1–5. Про двузначное число n>10 известно, что числа 10+k и n+k взаимно просты при всех натуральных k от 1 до n–10. Найдите все такие n. (**<u>11</u>. Предположим, что d=n–10≥2, тогда среди натуральных чисел 10+1, 10+2, …, 10+d найдётся ровно одно число (10+t), делящееся на d, значит, и n+t = (n–10)+(10+t)=d+(10+t) также делится на d>1, т.е. числа 10+t и n+t не будут взаимно просты. Противоречие, значит, наше предположение неверно и d=n–10=1.)**

1–6. На командный математический турнир нужно в классе собрать команду из 5 или 6 человек, назначив при этом капитана команды и его заместителя. Сколько учеников в классе, если количество способов создания такой команды равно 210210? (**<u>15</u>. После выбора N и (N–1) способами капитана и зама (из N учеников) надо выбрать ещё 4 человек среди N-2 оставшихся и одного "новичка», который то ли успеет, то ли не успеет подать документы в школу до начала турнира, а это число равно $C_{N-1}^4=\dfrac{(N-1)!}{4!\cdot(N-5)!}$. Получающаяся величина $N(N-1)\cdot\dfrac{(N-1)!}{4!\cdot(N-5)!}$ растёт с ростом N и принимает значение 210210 при N=15. *<u>Комментарий</u>: Предъявленное автором рассуждение, к сожалению, отражает неблагоприятную ситуацию, сложившуюся в последнее время.*)**



2–2. При каком наибольшем N на поле 10×10 можно расставить по N кораблей 1×4, 1×3 и 1×2? Корабли между собой не соприкасаются. *Приведите ответ и пример.* (**<u>5</u>. Узлы – точки на пересечении линий сетки. Корабль 1×4 занимает 10 своих узлов, 1×3 – 8, 1×2 – 6 (узлы не могут принадлежать разным кораблям, т.к. корабли не соприкасаются). Тогда суммарное количество всех узлов кораблей N·(10+8+6)=24N не превосходит количества всех узлов на поле, а их 11·11=121. Значит, 24N≤121, откуда N≤5. Пример на N=5 см. рис.)**

2–3. Какое наименьшее количество выстрелов надо сделать одновременно по клеткам поля 10×10, чтобы гарантированно попасть в неизвестно где расположенный «авианосец» в виде четырёхклеточной буквы «Г»? (**<u>33 выстрела</u> – см. пример на рис.1 – стреляем в клетки под номером 3 при диагональной раскраске в 3 цвета. В каждый прямоугольник 2×3 надо сделать хотя бы 2 выстрела, иначе в нём можно разместить «авианосец», в который мы не попадём. Всё поле 10×10 разбивается на 16 прямоугольников 2×3 и одну фигуру «Г» (см. рис.2), в которую также надо выстрелить, значит, нам надо не менее 16·2+1=33 выстрелов.)**

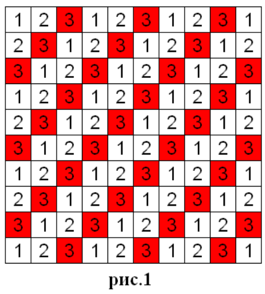


рис.1

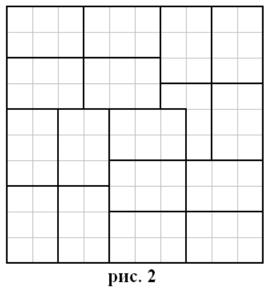
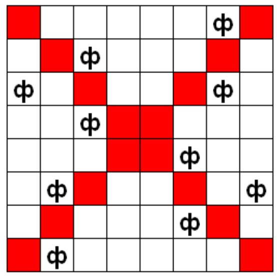


рис. 2

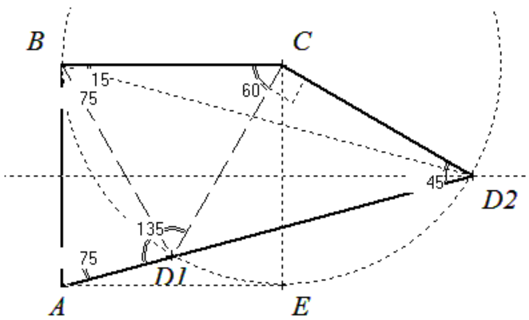
2–4. В последовательности целых чисел $\{a_n\}$ первый член равен $2^{2022}+2^{2021}$, а при $n \geq 1$ член a_{n+1} равен a_n-1, если a_n чётно, и $(a_n-1)/2$, если a_n нечётно. Найдите номер первого неположительного члена этой последовательности. **(<u>2025</u>. $a_1=2^{2022}+2^{2021}$ – чётно, $a_2=2^{2022}+2^{2021}-1$ – нечётно, $a_3=2^{2021}+2^{2020}-1$ – нечётно и т.д., $a_{2022}=2^2+2^1-1=5$ – нечётно, $a_{2023}=2$, $a_{2024}=1$, $a_{2025}=0$ – первый неположительный член последовательности.)**

2–5. Петя расставляет в ряд девять карточек с цифрами от 1 до 9 (каждая цифра ровно на одной карточке) в произвольном порядке, после этого находит сумму всевозможных двузначных чисел, составленных из двух цифр, стоящих рядом. Какое значение могла принимать цифра на второй слева карточке, если известно, что полученная Петей сумма равна 480? (**<u>9, 8, 7, 6, 4, 3, 2</u>. Если расписать данную сумму по разрядам, то получим $11\cdot(a_2+a_3+\ldots+a_8)+10a_1+a_9$ и согласно транснеравенству наибольшее значение будет равно $11\cdot(9+8+\ldots+3)+10\cdot 2+1=483$, а значение 480 можно получить, только поменяв местами 2 и 5, т.е. при $a_1=5$, а 2 стоит на одном из мест со второго по восьмое. Значит, цифра a_2 принимает одно из 7 значений (9, 8, 7, 6, 4, 3, 2).)**

2–6. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ферзей можно поставить на шахматную доску без двух главных диагоналей? *Через дырку ферзь не бьёт. Приведите ответ и пример.* **(<u>10</u>, см. рис. методом пропеллера. Каждая из 4 зон по краям состоит из 3 рядов одного направления, в каждый из которых можно поставить максимум одного ферзя, значит, в зоне может стоять максимум 3 ферзя, причём расстановка с точностью до симметрии единственная (см. левую зону на рисунке. Но при трёх ферзях в одной зоне в соседних зонах уже не может быть трёх ферзей, что проверяется небольшим перебором. Значит, всего ферзей не более $2\cdot3+2\cdot2=10$.)**



3–3. На столе стоят 20 одинаковых с виду гирь, по одной гире весом 21 г, 22 г, 23 г, …, 40 г, из которых 19 чёрных и 1 белая. Также есть неточные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть по одной гире, и весы покажут, какая тяжелее, но только если разность весов этих гирь превышает восемь граммов. Петя взвесил каждую чёрную гирю с каждой чёрной гирей по одному разу и обнаружил, что ровно в 56 случаях весы были не в равновесии. Сколько весит белая гиря? (**<u>22 или 39</u>. Если бы каждую гирю взвесили с каждой, то неравенство чаш получили бы ровно 11+10+…+1=66 раз. Петя же получил на 10 неравенств меньше, значит, белой будет гиря, которая участвует ровно в 10 таких неравенствах, а это либо 22 г (10 раз проиграет), либо 39 г (10 раз выиграет).)**

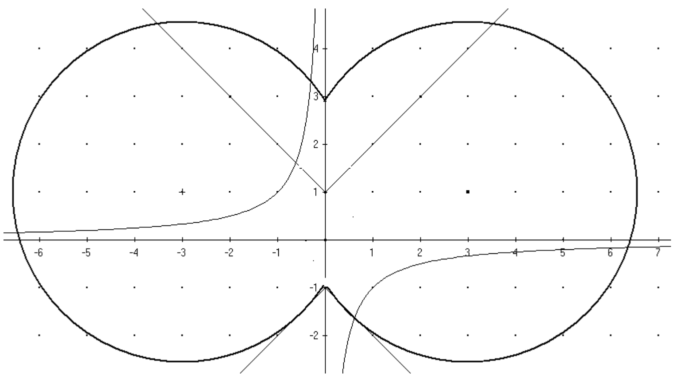


3–4. Найдите угол *ADC* выпуклого четырёхугольника *ABCD*, в котором $\angle ABC=90°$, $\angle DAB=75°$ и $AB=BC=CD$. **(<u>45° или 135°</u>, что нетрудно показать при «идеальном построении» – см. чертёж)**

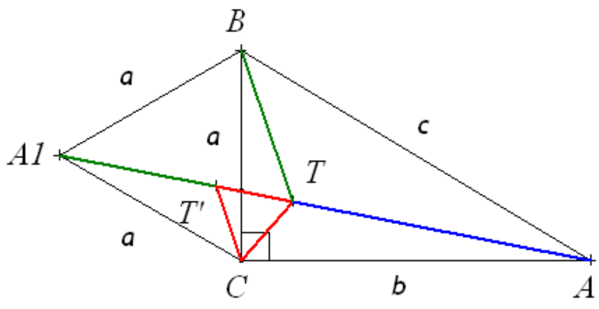
3–5. Какое наибольшее количество решений может иметь система уравнений

$$\begin{cases} (xy+1)(|x|-|y|+1)=0, \\ x^2+y^2-6|x|-2y+a=0 \end{cases}$$

при действительном значении параметра *a*? **(<u>10</u>, что находим с помощью графиков – см. рис., рассматривая точки пересечения с гиперболой и 4 лучами (первое уравнение) «двойной окружности» $(|x|-3)^2+(y-1)^2=10-a$, сливающейся в единое множество «восьмёрку» при увеличении радиуса $R=\sqrt{10-a}$.)**

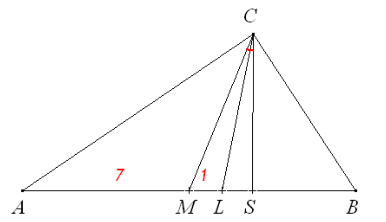


3–6. Найдите минимальную сумму расстояний до вершин от точки внутри треугольника со сторонами $2, \sqrt{3}, \sqrt{7}$. **($\sqrt{13}$. Исходный треугольник является прямоугольным с катетами $a=\sqrt{3}, b=2$ и гипотенузой**



$c=\sqrt{7}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}$ **. Нужная нам точка с минимальной суммой расстояний будет точкой Торричелли. В силу её свойств минимальная сумма расстояний до вершин равна расстоянию от любой вершины треугольника до третьей вершины внешней надстройки (правильного треугольника) на противоположной стороне. В частности, равна расстоянию AA_1 (см. рис.). Этот факт доказывается поворотом на 60° вокруг вершины треугольника: $AT+CT+BT=AT+TT'+T'A_1\geq AA_1$, значит, точки T и T' должны лежать на отрезке AA_1. В треугольнике ACA_1 угол между сторонами $A_1C=a$ и $AC=b$ равен 90°+60°=150°, тогда по теореме косинусов $AA_1^{\ 2}=a^2+b^2-2ab\cos 150^\circ=a^2+b^2+\sqrt{3}ab=3+4+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot 2=13$.)**

4–4. *CM, CL* – соответственно медиана и биссектриса треугольника *ABC*, точка *S* на стороне *AB* такова, что $\angle MCL=\angle LCS$ (*L* между *M* и *S*). Найдите *MS*, если *AB*=14, *ML*=1. (**<u>1,96</u>. Из условия равенства углов следует, что *CS* – симедиана (симметрична медиане относительно биссектрисы). Тогда по свойствам симедианы и биссектрисы** $\frac{AS}{BS}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2=\left(\frac{AL}{LB}\right)^2=\left(\frac{AM+ML}{BM-ML}\right)^2=\left(\frac{7+1}{7-1}\right)^2=\frac{16}{9}$**,**



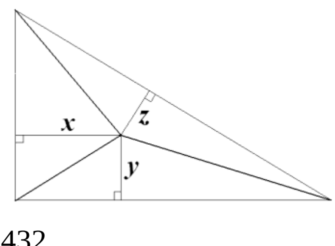
$AS=\frac{16}{16+9}\cdot AB=\frac{16}{25}\cdot 14=8{,}96$**,** $MS=AS-AM=8{,}96-7=1{,}96$**. Расположение точек *A* и *B* с точностью до симметрии можно считать таким, как на чертеже.)**

4–5. Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству $P(x)<2022$, если для квадратного трехчлена $P(x)$ выполняется равенство $P(x)\cdot P(x-1)=P(x^2)$? (**<u>90</u>. Запишем $P(x)=ax^2+bx+c$ с неизвестными коэффициентами *a, b, c* и подставим в наше равенство. Получим пять уравнений на *a, b, c*, которые имеют единственное решение *a*=*b*=*c*=1 (сначала из сравнения коэффициентов при x^4 получим *a*=1, затем из сравнения коэффициентов при x^3 получим *b*=1, и далее из сравнения свободных членов *c*=1 или *c*=0. При проверке подходит только *c*=1. Решим теперь неравенство $x^2+x+1<2022$. Ему удовлетворяют целые числа в переделах от (–45) до 44 – всего 90 целых чисел.)**

4–6. Найдите целочисленный корень уравнения $f(x)=0$, если функция $f(x)$ определена при всех действительных x и удовлетворяет условию $4f(x)+9f(2-x)=x^2$. (**<u>6</u>. Заметим, что $4f(x+2)+9f(-x)=(x+2)^2$, а $4f(-x)+9f(2+x)=x^2$, откуда после умножения первого равенства на 9, второго равенства – на 4, и вычитания их друг из друга получим** $f(-x)=\frac{9(x+2)^2-4x^2}{9^2-4^2}$ **и** $f(x)=\frac{9(2-x)^2-4x^2}{9^2-4^2}$**. Тогда уравнение $f(x)=0$ равносильно уравнению $9(2-x)^2=4x^2$, корнями которого будут 6 и 6/5.)**

5–5. Каждую сторону и диагональ правильного пятиугольника *ABCDE* красят либо в синий, либо в красный цвет. Сколько существует способов сделать такую раскраску, чтобы нашёлся хотя бы один треугольник с вершинами в вершинах исходного пятиугольника, все стороны которого покрашены в один цвет? (**<u>1012</u>=2^{10}–12, т.к. треугольника не будет только в случае, когда синие и красные отрезки будут образовывать циклы длины 5, а таких циклов ровно 4!:2=12.)**

5–6. Пусть *PM, PN* и *PK* – длины перпендикуляров, опущенных на прямые, содержащие стороны треугольника, из некоторой точки *P* внутри треугольника. Найдите наибольшее возможное значение произведения $PM\cdot PN\cdot PK$, если стороны треугольника равны 18, 24 и 30. (**<u>230,4</u>. Заметим, что данный треугольник – прямоугольный, т.к. его стороны удовлетворяют теореме Пифагора. Пусть нужные нам отрезки, проведённые соответственно к сторонам 18, 24 и 30 равны *x, y, z*, тогда удвоенная площадь всего треугольника равна $432=18\cdot 24=18x+24y+30z$, т.к. данные отрезки фактически являются высотами трёх треугольников, на которые разрезается исходный треугольник отрезками от внутренней точки до вершин. Из неравенства Коши следует, что** $\sqrt[3]{18x\cdot 24y\cdot 30z}\leq\frac{18x+24y+30z}{3}=\frac{432}{3}=144$**, откуда получаем, что** $xyz\leq\frac{144^3}{18\cdot 24\cdot 30}=\frac{144\cdot 8}{5}=230{,}4$**, при этом равенство достигается при условии $18x=24y=30z$, что возможно при соответствующих значениях *x, y* и *z*.)**



6–6. Пусть *N* – количество способов поставить на шахматную доску 3 белых, 3 синих, 3 красных и 5 зелёных слонов так, чтобы никакие два слона не били друг друга. На какую наибольшую степень двойки делится *N*? (**<u>13</u>. Всего существует 2^8 способов поставить на шахматную доску 3+3+3+5=14 слонов, не бьющих друг друга, что доказывается с помощью разбиения доски на 7 чёрных и 7 белых диагоналей. Затем существует** $P(3{,}3{,}3{,}5)=\frac{14!}{3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 5!}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2^3\cdot 3^3}=2^5\cdot n$ **способов (где *n* – нечётное) раскрасить слонов в нужный набор цветов, откуда следует, что $N=2^8\cdot P(3,\ 3,\ 4,\ 4)$ содержит 13=8+5 двоек.)**