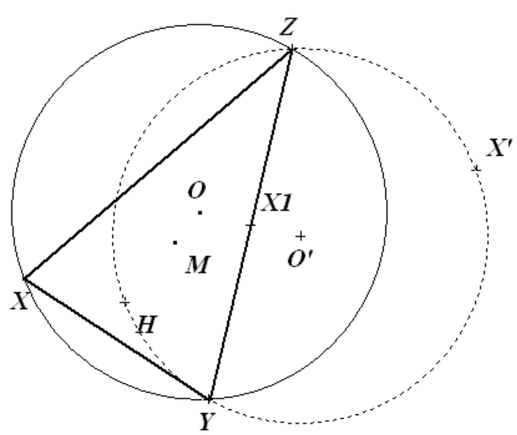
XVIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XV Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль».
<u>Старшая лига (10-11 классы).</u> **<u>Решения</u>.** ***10 сентября 2022 года.***

1. Пусть $P(x)$ – многочлен (не равный тождественно нулю), такой, что $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$ для всех действительных x, а также $(P(2))^2=P(3)$. Найдите $P(1{,}5)$. **(<u>1,25=5/4</u>. Подставляя последовательно вместо x значения 1, 0, –1, 2, узнаём, что $P(1)=0$, $P(0)=0$, $P(-1)=0$, $P(2)=4$, $P(3)=16$, при этом больше корней у многочлена нет, что следует из данного функционального уравнения, когда мы начнём добавлять ±1 к новому четвёртому корню (если такой найдётся), получая бесконечную серию корней в виде арифметической прогрессии с разностью ±1 за пределами отрезка [–1;1]. Тогда $P(x)=(x-1)x(x+1)Q(x)$, где $Q(x)$ – некоторый многочлен, не имеющий корней. Подставим в уравнение и получим $Q(x+1)= Q(x)$, что возможно при всех действительных x только для константы ($Q(x)=2/3$), которую находим с помощью равенства $P(2)=4$. Тогда P(1,5)=5/4=1,25.)**

2. В однокруговом турнире (каждый с каждым должен сыграть один раз) между 14 шахматистами к некоторому моменту было сыграно 65 партий, причём каждый шахматист сыграл чётное количество партий, а один всё это время был болен, наконец-то поправился и теперь смог принять участие в турнире. Сколькими способами можно провести ещё несколько партий так, чтобы каждый шахматист сыграл нечётное число партий? Способы, отличающиеся только порядком сыгранных партий, считаются одинаковыми. **(<u>8192</u>. Рассмотрим граф несыгранных партий, вершины – шахматисты, несыгранные партии – рёбра. Имеем связный за счёт бывшего больного шахматиста граф на 14 вершин и $C_{14}^2-65=\frac{14\cdot 13}{2}-65=91-65=26$ рёбер, при этом степень каждой вершины нечётна, т.к. каждому осталось сыграть нечётное количество партий из 13 необходимых. Будем рассуждать, допуская в нашем графе наличие кратных рёбер и петель. Пронумеруем рёбра нашего исходного графа G. Пусть 26-е ребро соединяет вершины A и B. Рассмотрим граф G_1, в котором вершины A и B слились, а 26-е ребро исчезло, при этом другие рёбра между этими вершинами превратились в петли в обобщённой вершине AB. Заметим теперь, что существует взаимно-однозначное соответствие между способами стирания рёбер в графах G и G_1, надо только правильно распорядиться ребром номер 26 в графе G, чтобы степени вершин A и B оказались чётными. Таким образом, мы доказали, что объединение двух вершин со стиранием одного ребра между ними сохраняет количество способов стирания рёбер. Проделаем такую операцию 13 раз, что можно сделать за счёт связности графа, и получим граф G_{13}, состоящий из одной вершины, у которой 13 рёбер-петель. Но в таком графе можно стереть любое подмножество рёбер, т.к. степень вершины окажется равна удвоенному количеству оставшихся петель, т.е. будет чётной. Количество таких подмножеств равно $2^{13}=8192$.)**

3. При изучении геометрической компьютерной программы Петя отметил (с обозначением) 6 различных точек – вершины разностороннего непрямоугольного треугольника ABC, его центроид M, ортоцентр H и центр описанной окружности O. После этого он стирает 3 точки из этих 6, причём обязательно хотя бы одну вершину, и предлагает Васе восстановить треугольник. Сколькими способами Петя может стереть 3 указанных точки, чтобы Вася имел возможность гарантированно восстановить треугольник (не указывая точно обозначения вершин)? **(<u>15 способов</u>. 1). Если стёрты две вершины, то по паре точек из тройки H, M и O всегда восстановим третью, т.к. эти точки лежат на прямой Эйлера именно в таком порядке и $HM:MO=2:1$. Тогда строим описанную окружность, середину X_1 стороны напротив имеющейся вершины X (т.к. по теореме Архимеда $XM:MX_1=2:1$). Затем центральной симметрией окружности относительно X_1 в точках пересечения окружности и её образа отметим две оставшиеся вершину Y и Z, причём будет ровно 2 точки пересечения (см. рис.), т.к. X_1 не будет центром окружности (треугольник ABC не является прямоугольным, т.к. иначе H совпа-**



дёт с одной из вершин). Это даёт нам 3·3=9 вариантов стирания точек (2 вершины – 3 способа, 1 замечательную точку – 3 способа). 2). Если стёрта одна вершина и оставлены либо *H*, либо *M*, то мы в первом случае (*H*) через каждую видимую вершину проведём прямую, перпендикулярную высоте из другой вершины, и на пересечении этих прямых отметим третью вершину. Во втором случае (*M*) по теореме Архимеда построим середину ещё одной стороны, имеющей вершину среди исходных двух, затем уже построим третью вершину. Это даёт нам 3·2=6 случаев восстановления треугольника. 3). Если стёрта одна вершина и оставлена *O*, то третьей вершиной может быть любая новая точка на окружности, т.е. треугольник невозможно восстановить. 4). Если стёрты все три вершины, то … треугольник по точкам *H, M* и *O* восстановить не удастся (см. фактически решение в первом случае, где для любой произвольной вершины *X* будем получать свой треугольник).)

4. *Хромой* ферзь бьёт во всех своих 8 направлениях не далее, чем на 3 клетки. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга *хромых* ферзей можно поставить на шахматную доску? *Приведите ответ и пример.* **(<u>13 хромых ферзей – см. рис.1</u>. Разобьём доску на 4 квадрата 4×4. Перебор показывает, что существует ровно 1 способ (с точностью до симметрии – см. рис.2) поставить в квадрате 4×4 наибольшее количество (4) хромых ладей. А далее перебор показывает, что такой квадрат из 4 угловых может быть единственным. Значит, хромых ферзей не более 4+3·3=13.)**

		ф					ф
ф					ф		
			ф				
	ф					ф	
				ф			
		ф					ф
ф					ф		
			ф				

рис.1

		ф	
ф			
			ф
	ф		

рис.2

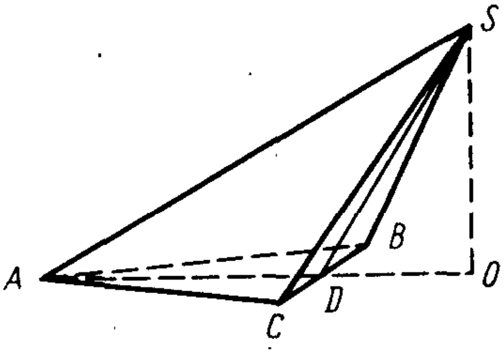
5. Имеется *n* различных натуральных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. Выпишем все числа, обратные к каждому из чисел, к каждому произведению двух чисел, к каждому произведению трёх чисел, ..., к произведению всех чисел. Приведите пример таких различных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, что сумма всех выписанных дробей равна 1. **(<u>$a_1=n, a_2=n+1, ..., a_n=2n-1$</u>. Добавим 1 к нашей сумме дробей, приведём всю сумму к общему знаменателю и получим после сворачивания скобок следующее равенство $\frac{(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)}{a_1a_2...a_n}=2$, которое для нашего набора чисел в силу равенств $a_{k+1}=a_k+1$ для всех *k* в пределах от 1 до *n*–1 превратится в верное равенство $\frac{(a_n+1)}{a_1}=\frac{2n}{n}=2$. *<u>Комментарий</u>:*** *Классический трюк с суммой обратных величин, где в знаменателях перебираются произведения чисел во всех подмножествах.*)

6. Пусть $f(n)$ – количество натуральных чисел, взаимно простых с *n* и не превосходящих *n*. Для скольких чисел первой тысячи выполняется равенство $f(9n)=6\cdot f(n)$? **(<u>667</u>. В силу свойств мультипликативной функции Эйлера получаем, что *n* не было кратно 3 и тогда $f(9n)=(3^2-3)\cdot f(n)=6f(n)$, иначе $f(9n)=9\cdot f(n)$. А в первой тысяче ровно 333 числа, кратных 3, и 667=1000–333 некратных 3.)**

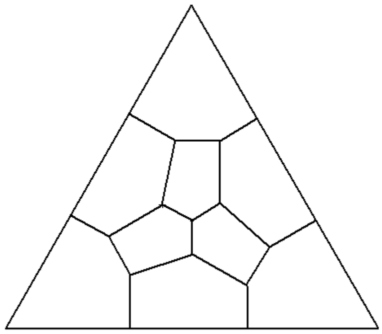
7. Сколько существует пар натуральных чисел *a* и *b*, не превосходящих 1000, таких, что числа $\frac{a-1}{b-1}$ и $\frac{a+1}{b+1}$ являются соседними натуральными числами (отличаются на 1)? **(<u>21</u>. Заметим, что $b\geq 2$. Воспользуемся свойством ряда равных отношений. Тогда, если первое число меньше второго, то $\frac{a-1}{b-1}+1=\frac{a+b-2}{b-1}=\frac{a+1}{b+1}=\frac{(a+1)-(a+b-2)}{(b+1)-(b-1)}=\frac{3-b}{2}\leq\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$ - не является натуральным числом. Если же первое число больше второго, то $\frac{a-1}{b-1}-1=\frac{a-b}{b-1}=\frac{a+1}{b+1}=\frac{(a+1)-(a-b)}{(b+1)-(b-1)}=\frac{b+1}{2}$ – натуральное число, значит, *b* – нечётное число, не меньшее 3. Тогда $a=\frac{(b+1)^2}{2}-1\leq 1000$, откуда чётный квадрат $(b+1)^2$, не**

меньший 4^2, должен не превосходить 2002, т.е. это максимум 44^2=1936. А таких чётных квадратов будет ровно 21.)

8. Петя нарисовал прямоугольник, разделил его на 64 меньших прямоугольника, проведя по 7 прямых, параллельных каждой из сторон исходного прямоугольника. После этого Вася указывает одновременно на N прямоугольников разбиения, а Петя называет площадь каждого из этих прямоугольников. При каком наименьшем N Вася сможет гарантированно узнать размеры прямоугольника? **(<u>Это невозможно сделать</u>, т.к. при увеличении одного размера в 2 раза и уменьшении другого в 2 раза площади всех частей останутся прежними.)**

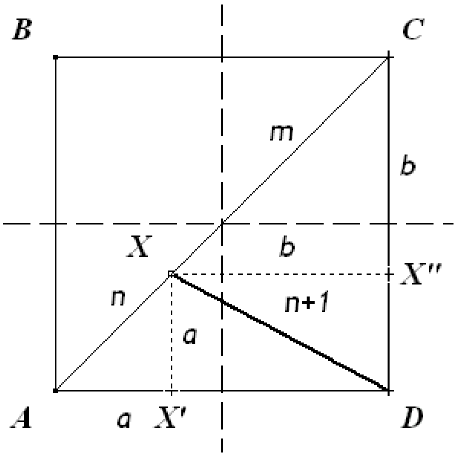


9. Найдите объём треугольной пирамиды $ABCS$, у которой SA=12, BC=24, а остальные рёбра равны 18. **(<u>576</u>. Треугольники ABC и SBC – равнобедренные и равные (см. рис.). Пусть D – середина BC, тогда** $AD = SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \sqrt{324-144} = 6\sqrt{5}$. **По формуле Герона найдём** $S_{\Delta ASD} = \sqrt{(6\sqrt{5}+6)\cdot(6\sqrt{5}-6)\cdot 6\cdot 6} = \sqrt{(180-36)\cdot 6\cdot 6} = 72$. **Плоскость ASD разбивает пирамиду на две равных пирамиды с основанием ASD и высотами BD=CD=12, значит, объём всей пирамиды равен** $2\cdot\frac{1}{3}\cdot 72\cdot 12 = 576$ **.)**



10. Существует ли треугольник, который можно разрезать на выпуклые пятиугольники? Ответ обосновать. **(Да, существует, см. рисунок.)**

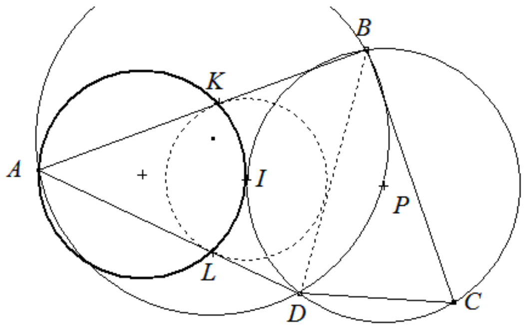
11. На диагонали квадрата нашлась такая точка, что расстояния от неё до некоторых трёх вершин квадрата равны n, $n+1$, $m>n+1$. При каком наименьшем натуральном n число m будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,1? **(<u>9</u>. В силу свойств серединного перпендикуляра (см. рис.) точка X на диагонали будет расположена на расстояниях n и m от концов этой диагонали, тогда спроецировав её на стороны, получим два равнобедренных прямоугольных треугольника, в которых по теореме Пифагора $n^2=2a^2$, $m^2=2b^2$, а также прямоугольный треугольник, в котором $(n+1)^2=a^2+b^2$. Тогда $2(n+1)^2=2a^2+2b^2=n^2+m^2$, откуда** $m = \sqrt{n^2+4n+2} = \sqrt{(n+2)^2-2}$**, где с ростом n дробная часть числа m растёт, начиная с** $\sqrt{7}-2 > 0{,}6$**, при n=8 получим дробную часть** $\sqrt{98}-9 < 0{,}9$**, а при n=9 получим дробную часть** $\sqrt{119}-10 > 0{,}9$**, т.е. первое отличие от целого числа меньше, чем на 0,1.)**



12. a, b и c — попарно различные натуральные числа, $b+c+bc$ делится на a, $c+a+ca$ делится на b, $a+b+ab$ делится на c. Какое наибольшее количество простых чисел может быть среди чисел a, b, c? *Приведите ответ и пример.* **(<u>2 простых числа из набора 1, 3, 7.</u> По условию $b+c+bc+1 = (b+1)(c+1) \equiv 1 \pmod{a}$. Поэтому $(a+1)(b+1)(c+1) \equiv 1 \pmod{a}$. Аналогично обстоят дела с модулями b и c. Следовательно, $(a+1)(b+1)(c+1)-1 = abc+ab+bc+ac+a+b+c$ делится на a, b и c. Если все три эти числа просты, то $abc+ab+bc+ac+a+b+c$ делится на abc, то есть $ab+bc+ac+a+b+c$ также делится на abc. Пусть $a < b < c$. Среди чисел a, b, c нет двойки (если $a = 2$, то 2 является делителем нечётного числа $b+c+bc$), и потому $a \geq 3$, $b \geq 5$, $c \geq 7$. Поэтому $bc \leq abc/3$, $ac \leq abc/5$, $ab \leq abc/7$, $c \leq abc/15$, $b \leq abc/21$, $a \leq abc/35$.**

Складывая эти шесть неравенств, получаем, что $ab+bc+ac+a+b+c \le abc(1/3+1/5+1/7+1/15+1/21+1/35) < abc$. Противоречие с делимостью на abc, значит, максимум 2 простых числа.)

13. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено равенство $\angle DAB+2\angle BCD = 180°$. Вписанная окружность треугольника ABD касается сторон AB и AD в точках K и L. Укажите главное свойство точки касания описанных окружностей треугольников AKL и BCD. (**<u>Это центр *I* вписанной окружности треугольника *ABD*.</u>**)



14. Международная конференция многоногих существ проводится на вершине Стеклянной Горы. Количества ног участников — чётные натуральные числа $2a_1 \le 2a_2 \le \ldots \le 2a_n$. Склоны Стеклянной Горы скользки, очень скользки. Чтобы подняться на неё или спуститься с неё, существо должно обуть хотя бы половину своих ног в специальные альпинистские ботинки. Какое наименьшее количество таких ботинок необходимо запасти организаторам конференции, чтобы собрать всех участников на вершине? (**<u>*max* (a_1+a_2; a_n)</u>. Наверх должно добраться самое многоногое существо, значит, надо уже не менее a_n ботинок. Кроме того, наступит первый момент, когда наверху должны оказаться сразу два существа, т.к. кому-то надо спускаться вниз для передачи ботинок, а для того, чтобы добраться наверх, им надо хотя бы a_1+a_2 ботинок (минимальное число для двух существ). Значит, надо не менее *max* (a_1+a_2; a_n) ботинок. В качестве примера подойдёт следующий. Сначала первые два существа добираются туда, потом второе со всеми ботинками спускается вниз. Подымается третье, первое со всеми имеющимися наверху ботинками спускается вниз. Таким образом, первые два существа помогли перебраться наверх одному другому существу. Теперь такой алгоритм они проделывают для каждого из остальных существ, а в конце поднимаются вдвоём сами.)**

15. Действительные числа a, b, c таковы, что $b < 0$ и $ab = 9c$. При каких a многочлен $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ имеет три различных вещественных корня? (**<u>При всех действительных *a*</u>. Пусть $a > 0$. Тогда $f(0) = \frac{ab}{9} < 0$. Но $f\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{18} > 0$. Значит, многочлен имеет корни на участках $\left(-\infty, -\frac{a}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ и $(0, +\infty)$. Случай $a < 0$ разбирается аналогично. Случай $a = 0$ очевиден.)**

16. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки C_1, C_2 (C_2 ближе к B), на стороне BC – точки A_1, A_2 (A_2 ближе к C), на стороне CA – точки B_1, B_2 (B_2 ближе к A). Оказалось, что C_2A_1 параллельна CA, A_2B_1 параллельна AB, B_2C_1 параллельна BC и все эти шесть прямых касаются вписанной окружности треугольника ABC. Радиусы вписанных окружностей треугольников AB_2C_1, BC_2A_1 и CA_2B_1 равны $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ и $\sqrt{32}$ соответственно. Найдите отношение $AB:C_2B$. (**<u>3,5</u>. Заметим, что в силу равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки, сумма периметров маленьких треугольников равна периметру большого. Т.к. все четыре треугольника подобны, то и сумма радиусов $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{32}=7\sqrt{2}$ маленьких треугольников равна радиусу большого. Значит, стороны треугольников ABC и BC_2A_1 относятся как радиусы вписанных в них окружностей, т.е. $AB:C_2B = 7\sqrt{2}:\sqrt{8} = 3{,}5$.)**