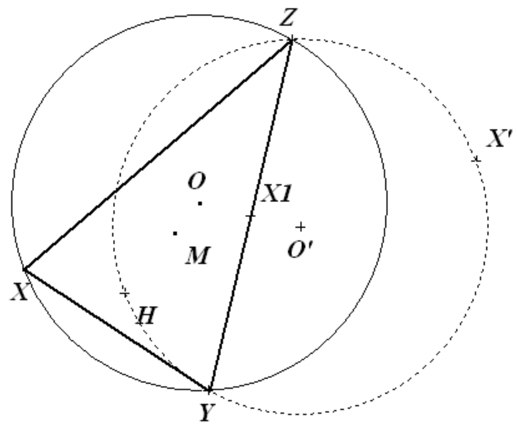
XVIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XV Турнир математических игр.
Математическая игра «Дуэль».
<u>Средняя лига (9 класс).</u>* Решения. *10 сентября 2022 года.

1. 6 футбольных команд сыграли по разу каждая с каждой и набрали ровно по n очков. Какое количество ничьих могло быть у команды? Напоминаем, что в футболе за победу даётся три очка, а за ничью — одно. (**<u>1, 3, 5</u>. Всего сыграно 6·5/2=15 матчей, за которые команды в сумме получат от 15·2=30 до 15·3=45 очков, при этом кратными 6 будут числа 30, 36 и 42. 30 очков могло быть только в случае сплошных ничьих (у каждой команды – по 5 ничьих), 42 – при 3 ничьих в сумме (у каждой команды по 1 ничье, 2 победы, 2 поражения), 36 – 9 ничьих на всех, у каждой команды по 6 очков (либо 2 победы, 3 поражения, либо 1 победа, 3 ничьи и 1 поражение, но в сумме у команд поровну побед и поражений, значит, возможен только второй вариант).)**

2. Представьте число 1000 в виде суммы двух различных натуральных чисел, каждое из которых делится на сумму цифр другого. **(например, <u>440 и 560</u>, делятся соответственно на *S*(560)=11 и *S*(440)=8)**

3. При изучении геометрической компьютерной программы Петя отметил (с обозначением) 6 различных точек – вершины разностороннего непрямоугольного треугольника *ABC*, его центроид *M*, ортоцентр *H* и центр описанной окружности *O*. После этого он стирает 3 точки из этих 6, причём обязательно хотя бы одну вершину, и предлагает Васе восстановить треугольник. Сколькими способами Петя может стереть 3 указанных точки, чтобы Вася имел возможность гарантированно восстановить треугольник (не указывая точно обозначения вершин)? (**<u>15 способов</u>. 1). Если стёрты две вершины, то по паре точек из тройки *H, M* и *O* всегда восстановим третью, т.к. эти точки лежат на прямой Эйлера именно в таком порядке и *HM*:*MO*=2:1. Тогда строим описанную окружность, середину X_1 стороны напротив имеющейся вершины *X* (т.к. по теореме Архимеда XM:MX_1=2:1). Затем центральной симметрией окружности относительно X_1 в точках пересечения окружности и её образа отметим две оставшиеся вершину *Y* и *Z*, причём будет ровно 2 точки пересечения (см. рис.), т.к. X_1 не будет центром окружности (треугольник *ABC* не является прямоугольным, т.к. иначе *H* совпадёт с одной из вершин). Это даёт нам 3·3=9 вариантов стирания точек (2 вершины – 3 способа, 1 замечательную точку – 3 способа). 2). Если стёрта одна вершина и оставлены либо *H*, либо *M*, то мы в первом случае (*H*) через каждую видимую вершину проведём прямую, перпендикулярную высоте из другой вершины, и на пересечении этих прямых отметим третью вершину. Во втором случае (*M*) по теореме Архимеда построим середину ещё одной стороны, имеющей вершину среди исходных двух, затем уже построим третью вершину. Это даёт нам 3·2=6 случаев восстановления треугольника. 3). Если стёрта одна вершина и оставлена *O*, то третьей вершиной может быть любая новая точка на окружности, т.е. треугольник невозможно восстановить. 4). Если стёрты все три вершины, то … треугольник по точкам *H, M* и *O* восстановить не удастся (см. фактически решение в первом случае, где для любой произвольной вершины *X* будем получать свой треугольник).)**



4. *Хромой* ферзь бьёт во всех своих 8 направлениях не далее, чем на 3 клетки. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга *хромых* ферзей можно поставить на шахматную доску? *Приведите ответ и пример*. **(<u>13 хромых ферзей – см. рис.1</u>. Разобьём доску на 4 квадрата 4×4. Перебор показывает, что существует ровно 1 способ (с точно-**

стью до симметрии – см. рис.2) поставить в квадрате 4×4 наибольшее количество (4) хромых ладей. А далее перебор показывает, что такой квадрат из 4 угловых может быть единственным. Значит, хромых ферзей не более 4+3·3=13.)

		ф					ф
ф					ф		
			ф				
	ф					ф	
				ф			
		ф					ф
ф					ф		
			ф				

рис.1

		ф	
ф			
			ф
	ф		

рис.2

5. Имеется n различных натуральных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. Выпишем все числа, обратные к каждому из чисел, к каждому произведению двух чисел, к каждому произведению трёх чисел, ..., к произведению всех чисел. Приведите пример таких различных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, что сумма всех выписанных дробей равна 1. **(<u>$a_1=n$, $a_2=n+1$, ..., $a_n=2n-1$</u>. Добавим 1 к нашей сумме дробей, приведём всю сумму к общему знаменателю и получим после сворачивания скобок следующее равенство** $\frac{(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)}{a_1a_2...a_n}=2$**, которое для нашего набора чисел в силу равенств $a_{k+1}=a_k+1$ для всех k в пределах от 1 до $n-1$ превратится в верное равенство** $\frac{(a_n+1)}{a_1}=\frac{2n}{n}=2$. ***<u>Комментарий:</u>*** *Классический трюк с суммой обратных величин, где в знаменателях перебираются произведения чисел во всех подмножествах.*)

6. Пусть $f(n)$ – количество натуральных чисел, взаимно простых с n и не превосходящих n. Для скольких чисел первой тысячи выполняется равенство $f(9n)=6\cdot f(n)$? **(<u>667</u>. В силу свойств мультипликативной функции Эйлера получаем, что n не было кратно 3 и тогда $f(9n)=(3^2-3)\cdot f(n)=6f(n)$, иначе $f(9n)=9\cdot f(n)$. А в первой тысяче ровно 333 числа, кратных 3, и 667=1000–333 некратных 3.)**

7. Сколько существует пар натуральных чисел a и b, не превосходящих 1000, таких, что числа $\frac{a-1}{b-1}$ и $\frac{a+1}{b+1}$ являются соседними натуральными числами (отличаются на 1)? **(<u>21</u>. Заметим, что $b\geq 2$. Воспользуемся свойством ряда равных отношений. Тогда, если первое число меньше второго, то**

$$\frac{a-1}{b-1}+1=\frac{a+b-2}{b-1}=\frac{a+1}{b+1}=\frac{(a+1)-(a+b-2)}{(b+1)-(b-1)}=\frac{3-b}{2}\leq\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

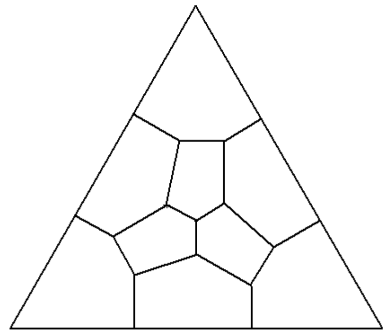
- не является натуральным числом. Если же первое число больше второго, то

$$\frac{a-1}{b-1}-1=\frac{a-b}{b-1}=\frac{a+1}{b+1}=\frac{(a+1)-(a-b)}{(b+1)-(b-1)}=\frac{b+1}{2}$$

– натуральное число, значит, b – нечётное число, не меньшее 3. Тогда $a=\frac{(b+1)^2}{2}-1\leq 1000$**, откуда чётный квадрат $(b+1)^2$, не меньший 4^2, должен не превосходить 2002, т.е. это максимум $44^2=1936$. А таких чётных квадратов будет ровно 21.)**

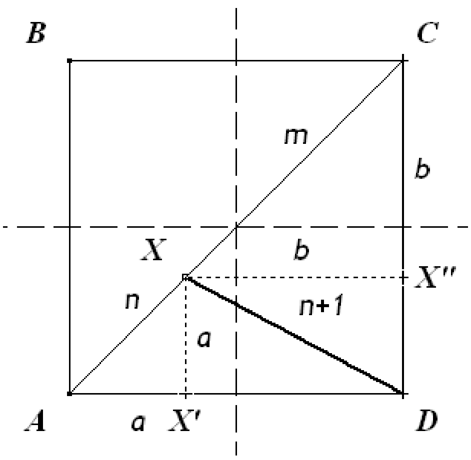
8. Петя нарисовал прямоугольник, разделил его на 64 меньших прямоугольника, проведя по 7 прямых, параллельных каждой из сторон исходного прямоугольника. После этого Вася указывает одновременно на N прямоугольников разбиения, а Петя называет площадь каждого из этих прямоугольников. При каком наименьшем N Вася сможет гарантированно узнать размеры прямоугольника? **(<u>Это невозможно сделать</u>, т.к. при увеличении одного размера в 2 раза и уменьшении другого в 2 раза площади всех частей останутся прежними.)**

9. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 33. Каждым ходом на доске выбирают два числа, одно из которых делится на другое, эти числа стирают и записывают на доску их частное. Эта процедура повторяется, пока не оказывается, что на доске нет чисел, делящихся друг на друга. Какое наименьшее количество чисел может остаться на доске? (**<u>7 чисел</u>. Разложим на простые множители их произведение $33!=2^{31}\cdot3^{15}\cdot5^7\cdot7^4\cdot11^3\cdot13^2\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31$. На каждом шаге после деления одного числа на другое мы будем уменьшать степени некоторых простых чисел этого произведения на чётные числа, значит, в произведении оставшихся чисел всегда будут присутствовать те простые числа, которые у нас встречаются изначально в нечётных степенях. Значит, у нас всегда останутся сами числа 17, 19, 23, 29 и 31 (уже 5 чисел), кроме того, ещё останутся числа, в разложение на простые множители которых входят 2, 3, 5 и 11, а это уже хотя бы два числа, т.к. вместе эти простые множители в произведении будут давать больше 33. Приведём пример, когда кроме чисел 17, 19, 23, 29 и 31 остались ещё числа $10=2\cdot5$ и $33=3\cdot11$ – эти 7 чисел мы вообще трогать не будем, кроме одного, которое в самом конце разделим на 1. Для этого чётные числа 32, 30, 28, 26, 24, 22, 18 разделим соответственно на 16, 15, 14, 13, 12, 11 и 9, получим набор (27, 25, 21, 20, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 и еще семь новых двоек). Затем 21:7=3, 20:4=5, 25:5:5=1, 6:2=3, 27:3:3:3=1, 8:2:2:2=1, остались четыре 1 и четыре 2, которые разделим в парах друг на друга и получим шесть 1. После этого сокращаем 1, деля их друг на друга, а на последнюю 1 разделим любое из 7 оставшихся чисел (10, 17, 19, 23, 29, 31, 33), в результате останутся эти 7 чисел, чего мы и добились.**)



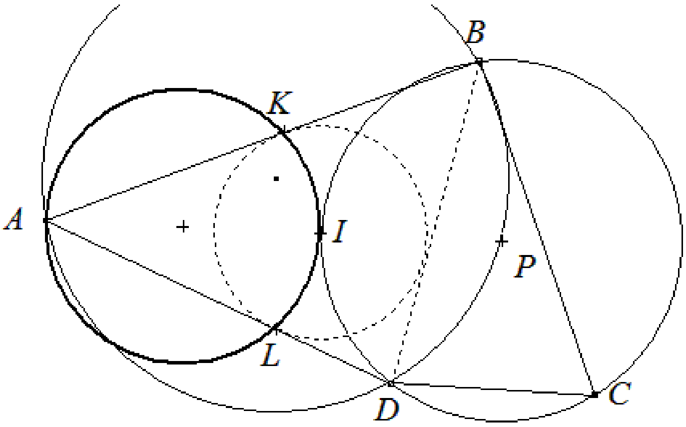
10. Существует ли треугольник, который можно разрезать на выпуклые пятиугольники? Ответ обосновать. (**Да, существует, см. рисунок.**)

11. На диагонали квадрата нашлась такая точка, что расстояния от неё до некоторых трёх вершин квадрата равны n, $n+1$, $m>n+1$. Найдите m (в зависимости от n). (<u>$m=\sqrt{n^2+4n+2}$</u>. **В силу свойств серединного перпендикуляра (см. рис.) точка X на диагонали будет расположена на расстояниях n и m от концов этой диагонали, тогда спроецировав её на стороны, получим два равнобедренных прямоугольных треугольника, в которых по теореме Пифагора $n^2=2a^2$, $m^2=2b^2$, а также прямоугольный треугольник, в котором $(n+1)^2=a^2+b^2$. Тогда $2(n+1)^2=2a^2+2b^2=n^2+m^2$, откуда** $m=\sqrt{n^2+4n+2}$.)



12. a, b и c — попарно различные натуральные числа, $b+c+bc$ делится на a, $c+a+ca$ делится на b, $a+b+ab$ делится на c. Какое наибольшее количество простых чисел может быть среди чисел a, b, c? *Приведите ответ и пример.* (**<u>2 простых числа из набора 1, 3, 7.</u> По условию $b+c+bc+1=(b+1)(c+1)\equiv 1 \pmod a$. Поэтому $(a+1)(b+1)(c+1)\equiv 1 \pmod a$. Аналогично обстоят дела с модулями b и c. Следовательно, $(a+1)(b+1)(c+1)-1=abc+ab+bc+ac+a+b+c$ делится на a, b и c. Если все три эти числа просты, то $abc+ab+bc+ac+a+b+c$ делится на abc, то есть $ab+bc+ac+a+b+c$ также делится на abc. Пусть $a<b<c$. Среди чисел a, b, c нет двойки (если $a=2$, то 2 является делителем нечётного числа $b+c+bc$), и потому $a\geq3$, $b\geq5$, $c\geq7$. Поэтому $bc\leq abc/3$, $ac\leq abc/5$, $ab\leq abc/7$, $c\leq abc/15$, $b\leq abc/21$, $a\leq abc/35$. Складывая эти шесть неравенств, получаем, что $ab+bc+ac+a+b+c\leq abc(1/3+1/5+1/7+1/15+1/21+1/35)<abc$. Противоречие с делимостью на abc, значит, максимум 2 простых числа.**)

13. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено равенство $\angle DAB+2\angle BCD = 180°$. Вписанная окружность треугольника ABD касается сторон AB и AD в точках K и L. Укажите главное свойство точки касания описанных окружностей треугольников AKL и BCD. **(<u>Это центр *I* вписанной окружности треугольника *ABD*.</u>)**



14. Международная конференция многоногих существ проводится на вершине Стеклянной Горы. Количества ног участников — чётные натуральные числа $2a_1 \le 2a_2 \le \ldots \le 2a_n$. Склоны Стеклянной Горы скользки, очень скользки. Чтобы подняться на неё или спуститься с неё, существо должно обуть хотя бы половину своих ног в специальные альпинистские ботинки. Какое наименьшее количество таких ботинок необходимо запасти организаторам конференции, чтобы собрать всех участников на вершине? **(<u>$max (a_1+a_2; a_n)$</u>). Наверх должно добраться самое многоногое существо, значит, надо уже не менее a_n ботинок. Кроме того, наступит первый момент, когда наверху должны оказаться сразу два существа, т.к. кому-то надо спускаться вниз для передачи ботинок, а для того, чтобы добраться наверх, им надо хотя бы a_1+a_2 ботинок (минимальное число для двух существ). Значит, надо не менее $max (a_1+a_2; a_n)$ ботинок. В качестве примера подойдёт следующий. Сначала первые два существа добираются туда, потом второе со всеми ботинками спускается вниз. Подымается третье, первое со всеми имеющимися наверху ботинками спускается вниз. Таким образом, первые два существа помогли перебраться наверх одному другому существу. Теперь такой алгоритм они проделывают для каждого из остальных существ, а в конце поднимаются вдвоём сами.)**

15. Сколько натуральных чисел n, не превосходящих 100, таковы, что $\frac{(n^2-1)!}{(n!)^n}$ – целое число?

(<u>74</u>, это все числа, кроме простых (их 25) и 4, в чём нетрудно убедиться, рассмотрев степени вхождения простых множителей в числитель и знаменатель)

16. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки C_1, C_2 (C_2 ближе к B), на стороне BC – точки A_1, A_2 (A_2 ближе к C), на стороне CA – точки B_1, B_2 (B_2 ближе к A). Оказалось, что C_2A_1 параллельна CA, A_2B_1 параллельна AB, B_2C_1 параллельна BC и все эти шесть прямых касаются вписанной окружности треугольника ABC. Радиусы вписанных окружностей треугольников AB_2C_1, BC_2A_1 и CA_2B_1 равны $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ и $\sqrt{32}$ соответственно. Найдите отношение $AB:C_2B$. **(<u>3,5</u>. Заметим, что в силу равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки, сумма периметров маленьких треугольников равна периметру большого. Т.к. все четыре треугольника подобны, то и сумма радиусов $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{32}=7\sqrt{2}$ маленьких треугольников равна радиусу большого. Значит, стороны треугольников *ABC* и *BC*$_2$*A*$_1$ относятся как радиусы вписанных в них окружностей, т.е. *AB*:*C*$_2$*B*= $7\sqrt{2}:\sqrt{8}=3{,}5$.)**