XVIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XV Турнир математических игр. Математическая игра «Дуэль».
<u>Младшая лига (7-8 классы).</u> 10 сентября 2022 года.

1. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Точка N на стороне AB такова, что $LN \parallel AC$, K — точка пересечения CN и AL. Известно, что $BN = AC$. Сколько ещё других пар равных отрезков есть гарантированно в этой геометрической конструкции? *Укажите их*.

2. Представьте число 1000 в виде суммы двух различных натуральных чисел, каждое из которых делится на сумму цифр другого.

3. При изучении геометрической компьютерной программы Петя отметил (с обозначением) 6 различных точек – вершины разностороннего непрямоугольного треугольника ABC, его центроид M, ортоцентр H и центр описанной окружности O. После этого он стирает 3 точки из этих 6, причём обязательно хотя бы одну вершину, и предлагает Васе восстановить треугольник. Сколькими способами Петя может стереть 3 указанных точки, чтобы Вася имел возможность гарантированно восстановить треугольник (не указывая точно обозначения вершин)?

4. *Хромой* ферзь бьёт во всех своих 8 направлениях не далее, чем на 3 клетки. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга *хромых* ферзей можно поставить на шахматную доску? *Приведите ответ и пример.*

5. Имеется n различных натуральных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. Выпишем все числа, обратные к каждому из чисел, к каждому произведению двух чисел, к каждому произведению трёх чисел, ..., к произведению всех чисел. Приведите пример таких различных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, что сумма всех выписанных дробей равна 1.

6. В ряд выписаны по возрастанию все натуральные числа от 1 до 6. Назовём блоком группу из одного или нескольких чисел, стоящих подряд. Разрешается взять два любых соседних блока и поменять их местами (например, из ряда 123456 можно получить ряд 152346, поменяв местами блоки «234» и «5»). За наименьшее количество таких операций упорядочьте исходный ряд по убыванию. *Укажите количество операций и сами операции*.

7. Сколько существует пар натуральных чисел a и b, не превосходящих 1000, таких, что числа $\dfrac{a-1}{b-1}$ и $\dfrac{a+1}{b+1}$ являются соседними натуральными числами (отличаются на 1)?

8. Петя нарисовал прямоугольник, разделил его на 64 меньших прямоугольника, проведя по 7 прямых, параллельных каждой из сторон исходного прямоугольника. После этого Вася указывает одновременно на N прямоугольников разбиения, а Петя называет площадь каждого из этих прямоугольников. При каком наименьшем N Вася сможет гарантированно узнать размеры прямоугольника?

9. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 33. Каждым ходом на доске выбирают два числа, одно из которых делится на другое, эти числа стирают и записывают на доску их частное. Эта процедура повторяется, пока не оказывается, что на доске нет чисел, делящихся друг на друга. Какое наименьшее количество чисел может остаться на доске?

10. Существует ли треугольник, который можно разрезать на выпуклые пятиугольники? Ответ обосновать.

11. Натуральное число, кратное 5, назовём *весёлым*, если при его увеличении в 5 раз остаток (ненулевой) при делении на 11 уменьшается на 5. Сколько существует трёхзначных *весёлых* чисел?

12. Петя, будучи старшим из трёх детей в семье, сказал: «Когда я родился, суммарный возраст наших родителей был равен 47 годам, год назад, когда родился мой младший брат Тёма, суммарный возраст всей нашей семьи был равен 77 годам, а сейчас мне, Вере и Тёме в сумме 17 лет». Сколько сейчас лет его сестре Вере?

13. В шестизначном числе $\overline{ПРИМЕР}$ одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, а разные – разными. На какое наибольшее число последовательных натуральных чисел оно может делиться? *Приведите ответ и пример.*

14. Международная конференция многоногих существ проводится на вершине Стеклянной Горы. Количества ног участников — чётные натуральные числа $2a_1 \le 2a_2 \le \ldots \le 2a_n$. Склоны Стеклянной Горы скользки, очень скользки. Чтобы подняться на неё или спуститься с неё, существо должно обуть хотя бы половину своих ног в специальные альпинистские ботинки. Какое наименьшее количество таких ботинок необходимо запасти организаторам конференции, чтобы собрать всех участников на вершине?

15. Сколько натуральных чисел n, не превосходящих 100, таковы, что $\frac{(n^2-1)!}{(n!)^n}$ – целое число?

16. 6 футбольных команд сыграли по разу каждая с каждой и набрали ровно по n очков. Какое количество ничьих могло быть у команды? Напоминаем, что в футболе за победу даётся три очка, а за ничью — одно.