XVIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XV Турнир математических игр. Математическая игра «Дуэль».
<u>Старшая лига (10-11 классы)</u>. 10 сентября 2022 года.

1. Пусть $P(x)$ – многочлен (не равный тождественно нулю), такой, что $(x–1)\cdot P(x+1) = (x+2)\cdot P(x)$ для всех действительных x, а также $(P(2))^2=P(3)$. Найдите $P(1,5)$.

2. В однокруговом турнире (каждый с каждым должен сыграть один раз) между 14 шахматистами к некоторому моменту было сыграно 65 партий, причём каждый шахматист сыграл чётное количество партий, а один всё это время был болен, наконец-то поправился и теперь смог принять участие в турнире. Сколькими способами можно провести ещё несколько партий так, чтобы каждый шахматист сыграл нечётное число партий? Способы, отличающиеся только порядком сыгранных партий, считаются одинаковыми.

3. При изучении геометрической компьютерной программы Петя отметил (с обозначением) 6 различных точек – вершины разностороннего непрямоугольного треугольника ABC, его центроид M, ортоцентр H и центр описанной окружности O. После этого он стирает 3 точки из этих 6, причём обязательно хотя бы одну вершину, и предлагает Васе восстановить треугольник. Сколькими способами Петя может стереть 3 указанных точки, чтобы Вася имел возможность гарантированно восстановить треугольник (не указывая точно обозначения вершин)?

4. *Хромой* ферзь бьёт во всех своих 8 направлениях не далее, чем на 3 клетки. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга *хромых* ферзей можно поставить на шахматную доску? *Приведите ответ и пример.*

5. Имеется n различных натуральных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. Выпишем все числа, обратные к каждому из чисел, к каждому произведению двух чисел, к каждому произведению трёх чисел, ..., к произведению всех чисел. Приведите пример таких различных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, что сумма всех выписанных дробей равна 1.

6. Пусть $f(n)$ – количество натуральных чисел, взаимно простых с n и не превосходящих n. Для скольких чисел первой тысячи выполняется равенство $f(9n)=6\cdot f(n)$?

7. Сколько существует пар натуральных чисел a и b, не превосходящих 1000, таких, что числа $\frac{a-1}{b-1}$ и $\frac{a+1}{b+1}$ являются соседними натуральными числами (отличаются на 1)?

8. Петя нарисовал прямоугольник, разделил его на 64 меньших прямоугольника, проведя по 7 прямых, параллельных каждой из сторон исходного прямоугольника. После этого Вася указывает одновременно на N прямоугольников разбиения, а Петя называет площадь каждого из этих прямоугольников. При каком наименьшем N Вася сможет гарантированно узнать размеры прямоугольника?

9. Найдите объём треугольной пирамиды $ABCS$, у которой SA=12, BC=24, а остальные рёбра равны 18.

10. Существует ли треугольник, который можно разрезать на выпуклые пятиугольники? Ответ обосновать.

11. На диагонали квадрата нашлась такая точка, что расстояния от неё до некоторых трёх вершин квадрата равны n, $n+1$, $m>n+1$. При каком наименьшем натуральном n число m будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,1?

12. a, b и c — попарно различные натуральные числа, $b+c+bc$ делится на a, $c+a+ca$ делится на b, $a+b+ab$ делится на c. Какое наибольшее количество простых чисел может быть среди чисел a, b, c? *Приведите ответ и пример.*

13. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено равенство $\angle DAB+2\angle BCD=180°$. Вписанная окружность треугольника ABD касается сторон AB и AD в точках K и L. Укажите главное свойство точки касания описанных окружностей треугольников AKL и BCD.

14. Международная конференция многоногих существ проводится на вершине Стеклянной Горы. Количества ног участников — чётные натуральные числа $2a_1 \le 2a_2 \le \ldots \le 2a_n$. Склоны Стеклянной Горы скользки, очень скользки. Чтобы подняться на неё или спуститься с неё, существо должно обуть хотя бы половину своих ног в специальные альпинистские ботинки. Какое наименьшее количество таких ботинок необходимо запасти организаторам конференции, чтобы собрать всех участников на вершине?

15. Действительные числа a, b, c таковы, что $b<0$ и $ab=9c$. При каких a многочлен $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ имеет три различных вещественных корня?

16. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки C_1, C_2 (C_2 ближе к B), на стороне BC – точки A_1, A_2 (A_2 ближе к C), на стороне CA – точки B_1, B_2 (B_2 ближе к A). Оказалось, что C_2A_1 параллельна CA, A_2B_1 параллельна AB, B_2C_1 параллельна BC и все эти шесть прямых касаются вписанной окружности треугольника ABC. Радиусы вписанных окружностей треугольников AB_2C_1, BC_2A_1 и CA_2B_1 равны $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ и $\sqrt{32}$ соответственно. Найдите отношение $AB:C_2B$.