XVIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XV Турнир математических игр.
Математическая игра «Пенальти».

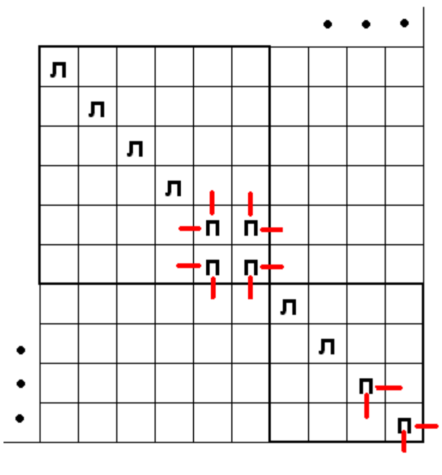
Младшая лига (7-8 классы).* Решения. *11 сентября 2022 года.

1. Найдите наименьшее семизначное число $\overline{\text{ОРЛЁНОК}}$, кратное 18. (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*) (**1023516 делится и на 2, и на 9 (значит, и на 18=2·9) по признакам делимости, а в интервале от 1023410 до 1023419 нет числа кратного 18=9·2, т.к. кратным 9 будет только нечётное число 1023417)**

2. На диагонали шахматной доски, идущей из левого нижнего угла ($a1$) в правый верхний ($h8$), стоят 8 фишек. За один ход можно выбрать 2 фишки и одну сдвинуть на одну клетку вправо, а другую — на одну клетку вверх (если соответствующие клетки свободны). Через несколько ходов 7 фишек оказались в клетках $h5$, $h6$, $h7$, $h8$, $g6$, $g7$, $g8$. Где к этому моменту могла оказаться 8-я фишка? (**$a7$ или $b8$. Введём обычную систему координат и заметим, что изначально сумма координат всех 8 фишек по горизонтальной оси («*X*») равна сумме координат по вертикальной оси («*Y*»), а за каждый ход обе суммы увеличиваются на 1, значит, они всегда будут равны между собой. В предлагаемой конечной позиции сумма координат 7 известных фишек по «*Y*» 2·(6+7+8)+5=47 на 6 меньше суммы координат по оси «*X*» 4·8+3·7)=53, значит, 8-я фишка должна иметь по «*Y*» координату на 6 больше, т.е. либо это клетка (1, 7), либо клетка (2, 8), которые соответствуют клеткам $a7$ и $b8$, причём для обоих случаев строится пример.)**

3. Сначала Маша нарисовала прямоугольник площади 96 см^2. После этого она увеличила его стороны на 1 см и получила прямоугольник с периметром 44 см. Чему стала равна площадь нового Машиного прямоугольника? (**117. $(a+1)(b+1)=ab+a+b+1=ab+(a+1+b+1)-1=$ 96+44/2–1=117, где a, b – стороны Машиного прямоугольника.)**

4. При каком наибольшем n на доску 100×100 можно поставить n ладей и n полуладей (бьют в двух направлениях, которые у каждой полуладьи могут быть своими) так, чтобы никакая фигура никакую не била? (**66. Каждая ладья бьёт 4 свои стенки (стороны клеток на краю доски), а каждая полуладья бьёт 2 стенки, значит, вместе они бьют $4n+2n\le 4\cdot 100$ стенок, откуда с учётом целочисленности $n\le 66$. В качестве примера подойдет расстановка, в которой 16 групп по 4 ладьи и 4 полуладьи занимают по 6 вертикалей и горизонталей (в виде квадратов 6×6 вдоль главной диагонали из левого верхнего в правый нижний угол), а на оставшихся 4 вертикалях и 4 горизонталях стоят 2 ладьи и 2 полуладьи (в правом нижнем квадрате 4×4, обозначены соответственно буквами «л» и «п»). На рисунке показано расположение 2 последних групп в зоне 10×10.)**



5. Сколько существует трёхзначных чисел n таких, что числа $5n-1$ и $n-10$ являются взаимно простыми? (**771. Если числа $(5n-1)$ и $(n-10)$ не взаимно просты, то у них есть общий простой делитель p, отличный от 5, тогда $(5n-1)-5(n-10)=49=7^2$ также делится на p, откуда $p=7$, а $n\equiv 10\equiv 3 \pmod 7$. Такими трёхзначными числами будут 101=7·14+3, 108=7·15+3, …, 997=7·142+3,**

т.е. 142–13=129 чисел. Значит, для 900–129=771 трёхзначных чисел *n* числа 5*n*–1 и *n*–10 являются взаимно простыми.)

6. Натуральное число назовём *незначительным*, если все его простые делители меньше 33. Натуральный делитель d натурального числа n назовём *значительным*, если $\sqrt{n} < d < n$. У скольких незначительных натуральных чисел ровно один значительный делитель? ($\underline{77 = C_{11}^2 + 2\cdot 11}$. **Упорядочим все натуральные делители числа** n **по возрастанию:** $1=d_1<d_2<\ldots<d_k$, **где** $k=\tau(n)$ **– количество различных натуральных делителей. Как известно, делители разбиваются на симметричные пары относительно середины этого ряда, где в каждой паре делители дают в произведении** n. **Если** $k\geq 6$, **то делители под номерами** $k–1$ **и** $k–2$ **точно будут значительными, т.к. каждый их них больше** $\sqrt{n}$. **Если** $k=5$, **то** $n=p^4$ **(**p **– простое) и имеет ровно один значительный делитель** p^3 **(имеем 11 незначительных чисел, для каждого из 11 простых чисел, меньших 33). Если** $k=4$, **то** $n=p^3$ **(**p **– простое) и имеет ровно один значительный делитель** p^2 **(ещё 11 незначительных чисел), или** $n=pq$ **(**$p<q$ **– различные простые числа) и имеет ровно один значительный делитель** q **(всего** $55 = C_{11}^2$ **незначительных чисел – для каждой пары из 11 простых чисел). Если** $k=3$ **и** $k=2$, **то соответственно** $n=p^2$ **и** $n=p$ **(**p **– простое) не имеют значительных делителей.)**

7. Квадрат 1001×1001 без угловой клетки разбивают на клетчатые прямоугольники так, чтобы произведение их площадей было максимальным. Чему равно это произведение? **(**$\underline{2^3\cdot 3^{333998}}$**, см. решение аналогичной задачи 15)**

8. Правильные многоугольники с 7, 8, 9, 10 и 11 вершинами вписаны в одну окружность. Никакие два из них не имеют общую вершину, никакие три их стороны не пересекаются в одной точке. В каком наибольшем количестве точек могут пересекаться стороны этих многоугольников? **(<u>160</u>=2·(7·4+8·3+9·2+10), т.к. каждая сторона каждого меньшего многоугольника пересекает границу большего многоугольника ровно в 2 точках)**

9. Найдите наибольшее семизначное число $\overline{ОРЛЁНОК}$, кратное 18. (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*) **(<u>9876492</u> делится и на 2, и на 9 (значит, и на 18=2·9) по признакам делимости, а в интервале от 9876590 до 9876594 нет числа кратного 18=9·2, т.к. кратным 9 будет только нечётное число 9876591)**

10. На диагонали шахматной доски, идущей из левого нижнего угла (*a*1) в правый верхний (*h*8), стоят 8 фишек. За один ход можно выбрать 2 фишки и одну сдвинуть на одну клетку вправо, а другую — на одну клетку вверх (если соответствующие клетки свободны). Через несколько ходов 7 фишек оказались в клетках *e*8, *f*8, *g*8, *h*8, *f*7, *g*7, *h*7. Где к этому моменту могла оказаться 8-я фишка? **(<u>*g*1 или *h*2</u>. Введём обычную систему координат и заметим, что изначально сумма координат всех 8 фишек по горизонтальной оси («*X*») равна сумме координат по вертикальной оси («*Y*»), а за каждый ход обе суммы увеличиваются на 1, значит, они всегда будут равны между собой. В предлагаемой конечной позиции сумма координат 7 известных фишек по «*X*» 2·(6+7+8)+5=47 на 6 меньше суммы координат по оси «*Y*» 4·8+3·7)=53, значит, 8-я фишка должна иметь по «*X*» координату на 6 больше, т.е. либо это клетка (7, 1), либо клетка (8, 2), которые соответствуют клеткам *g*1 и *h*2, причём для обоих случаев строится пример.)**

11. Сначала Маша нарисовала прямоугольник площади 54 см^2. После этого она увеличила его стороны на 1 см и получила прямоугольник с периметром 34 см. Чему стала равна площадь нового Машиного прямоугольника? **(<u>70</u>. $(a+1)(b+1)=ab+a+b+1=ab+(a+1+b+1)–1=54+34/2–1=70$, где a, b – стороны Машиного прямоугольника.)**

12. При каком наибольшем n на доску 1000×1000 можно поставить n ладей и n полуладей (бьют в двух направлениях, которые у каждой полуладьи могут быть своими) так, чтобы никакая фигура никакую не била? **(<u>666</u>. Каждая ладья бьёт 4 свои стенки (стороны клеток на краю доски), а каждая полуладья бьёт 2 стенки, значит, вместе они бьют $4n+2n\le 4\cdot 1000$ стенок, откуда с учётом целочисленности $n\le 666$. В качестве примера подойдет расстановка, в которой 166 групп по 4 ладьи и 4 полуладьи занимают по 6 вертикалей и горизонталей (в виде квадратов 6×6 вдоль главной диагонали из левого верхнего в правый нижний угол), а на оставшихся 4 вертикалях и 4 горизонталях стоят 2 ладьи и 2 полуладьи (в правом нижнем квадрате 4×4, обозначены соответственно буквами «л» и «п»). На рисунке показано расположение 2 последних групп в зоне 10×10 – см. задачу 4.)**

13. Сколько существует трёхзначных чисел n таких, что числа $3n+1$ и $n–8$ являются взаимно простыми? **(<u>720</u>. Если числа $(3n+1)$ и $(n–8)$ не взаимно просты, то у них есть общий простой делитель p, отличный от 3, тогда $(3n+1) – 3(n–8)=25=5^2$ также делится на p, откуда $p=5$, а $n\equiv 8\equiv 3 \pmod 5$. Такими трёхзначными числами будут $103=5\cdot 20+3$, $108=5\cdot 21+3$, …, $998=5\cdot 199+3$, т.е. $199–19=180$ чисел. Значит, для $900–180=720$ трёхзначных чисел n числа $3n+1$ и $n–8$ являются взаимно простыми.)**

14. Натуральное число назовём *незначительным*, если все его простые делители меньше 100. Натуральный делитель d натурального числа n назовём *значительным*, если $\sqrt{n} < d < n$. У скольких незначительных натуральных чисел ровно один значительный делитель? **(**$\underline{350 = C_{25}^2 + 2\cdot 25}$**. Упорядочим все натуральные делители числа n по возрастанию: $1=d_1<d_2<\ldots<d_k$, где $k=\tau(n)$ – количество различных натуральных делителей. Как известно, делители разбиваются на симметричные пары относительно середины этого ряда, где в каждой паре делители дают в произведении n. Если $k\ge 6$, то делители под номерами $k–1$ и $k–2$ точно будут значительными, т.к. каждый их них больше $\sqrt{n}$. Если $k=5$, то $n=p^4$ (p – простое) и имеет ровно один значительный делитель p^3 (имеем 25 незначительных чисел, для каждого из 25 простых чисел, меньших 100). Если $k=4$, то $n=p^3$ (p – простое) и имеет ровно один значительный делитель p^2 (ещё 25 незначительных чисел), или $n=pq$ ($p<q$ – различные простые числа) и имеет ровно один значительный делитель q (всего $300 = C_{25}^2$ незначительных чисел – для каждой пары из 25 простых чисел). Если $k=3$ и $k=2$, то соответственно $n=p^2$ и $n=p$ (p – простое) не имеют значительных делителей.)**

15. Квадрат 101×101 без угловой клетки разбивают на клетчатые прямоугольники так, чтобы произведение их площадей было максимальным. Чему равно это произведение? **(*<u>Комментарий</u>: Фактически (но с некоторым тонким моментом) речь идёт о классической задаче – разбить натуральное число (у нас $101^2–1=10200$)***

на натуральные слагаемые с наибольшим возможным произведением. Как известно, результат равен степени тройки, возможно умноженной на 2 или 2^2 в зависимости от остатка (2 и 1) при делении на 3 исходного числа. Ответ: **наибольшее произведение равно $2^3 \cdot 3^{3398}$. *Решение:* Сведём задачу к общей формулировке, описанной в комментарии. Сначала все 1 добавим к какому-нибудь числу (произведение станет больше). Если у нас есть число $n \geq 5$, то заменим его числами 3 и (n–3), тогда $3 \cdot (n-3) > n$ (что равносильно условию $n > 4{,}5$, т.е. $n \geq 5$) и произведение станет больше. Число 4 заменим на две 2 – произведение останется прежним. Таким образом, у нас остались только 2 и 3. Если есть хотя бы три двойки, то заменим их на две тройки и произведение станет больше, т.к. $2^3=8<9=3^2$. Значит, всё наше произведение будет равно степени 3, умноженной на одну или две двойки, в зависимости от остатка при делении на 3 (2 или 1). Но у нас число 10200 кратно 3, значит, наибольшее произведение будет равно 3^{3400}. Однако разбить на триминошки квадрат 101×101 без угловой клетки не удастся. Если раскрасить поле диагональной раскраской в 3 цвета, то у нас второго цвета будет на 1 клетку больше, значит, одна из них и будет свободной клеткой, т.к. каждая триминошка содержит по одной клетке каждого цвета. Но точно также это должна быть клетка второго цвета при диагональной раскраске в три цвета другого направления. Угловые клетки не могут быть одновременно цвета 2 при обеих раскрасках. Значит, мы должны иметь ещё и не тройки. Если мы две тройки заменим на три двойки, то они дадут вклад в произведение, равный 8. Если мы одну тройку заменим на 1 и 2, то вклад вместе с одной тройкой в произведение будет равен $3 \cdot 1 \cdot 2=6$. Значит, нам надо иметь 3 двойки и 3400–2=3398 троек. Тогда максимальное произведение равно $2^3 \cdot 3^{3398}$. Причём пример разрезания есть. Сначала выделим зону 99×101, которая очевидным образом разрезается на прямоугольники 1×3 вдоль стороны 99, кратной 3. Далее остаются полоска 1×101, которую режем на 33 триминошки и одну доминошку, и полоска 1×100, которую режем на 32 триминошки и две доминошки. Таким образом, мы разрезали квадрат 101×101 без угловой клетки на 3 доминошки 1×2 и 3398 триминошек 1×3, что нам и требовалось.)**

16. Правильные многоугольники с 7, 8, 9, 10, 11 и 12 вершинами вписаны в одну окружность. Никакие два из них не имеют общую вершину, никакие три их стороны не пересекаются в одной точке. В каком наибольшем количестве точек могут пересекаться стороны этих многоугольников? **(<u>250</u>=$2 \cdot (7 \cdot 5+8 \cdot 4+9 \cdot 3+10 \cdot 2+11)$, т.к. каждая сторона каждого меньшего многоугольника пересекает границу большего многоугольника ровно в 2 точках)**