XVIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XV Турнир математических игр.
Математическая игра «Пенальти».

<u>Старшая лига (9-11 классы).</u> **<u>Решения</u>. *11 сентября 2022 года.***

1. Найдите все пары натуральных чисел (a, b) таких, что существует натуральное число n, для которого выполняется условие: сумма цифр числа n равна a^2, а сумма цифр числа n+1 равна b^2. **(<u>$a>b$, $a\equiv 0 \pmod 3$, $b\equiv\pm 1 \pmod 9$</u>). Если n не оканчивается на 9, то у n+1 сумма цифр будет только на 1 больше, чем у числа n, но не существует отличающихся на 1 квадратов натуральных чисел. Значит, n оканчивается на 9 (точнее, на k девяток), тогда $S(n)-S(n+1)=9k-1=a^2-b^2\equiv -1 \pmod 9$, где, во-первых, $a>b$, во-вторых, перебор остатков по модулю 9 показывает, что такое возможно только при a, кратном 3, и b, имеющем остаток ±1 (1 и 8) при делении на 9, причём для каждой такой пары однозначно находится $k=(a^2-b^2+1)/9$, после чего строим подходящее нам число n, например, вида 11…199…9, где на конце ровно k девяток, а количество единиц равно a^2-9k (возможно, 0 единиц).)**

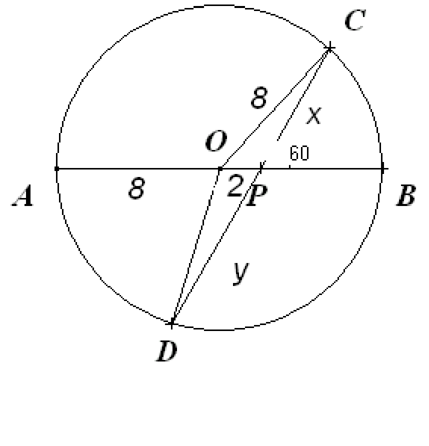
2. На диагонали шахматной доски, идущей из левого нижнего угла (a1) в правый верхний (h8), стоят 8 фишек. За один ход можно выбрать 2 фишки и одну сдвинуть на одну клетку вправо, а другую — на одну клетку вверх (если соответствующие клетки свободны). Через несколько ходов 7 фишек оказались в клетках h5, h6, h7, h8, g6, g7, g8. Где к этому моменту могла оказаться 8-я фишка? **(<u>a7 или b8</u>. Введём обычную систему координат и заметим, что изначально сумма координат всех 8 фишек по горизонтальной оси («X») равна сумме координат по вертикальной оси («Y»), а за каждый ход обе суммы увеличиваются на 1, значит, они всегда будут равны между собой. В предлагаемой конечной позиции сумма координат 7 известных фишек по «Y» 2·(6+7+8)+5=47 на 6 меньше суммы координат по оси «X» 4·8+3·7)=53, значит, 8-я фишка должна иметь по «Y» координату на 6 больше, т.е. либо это клетка (1, 7), либо клетка (2, 8), которые соответствуют клеткам a7 и b8, причём для обоих случаев строится пример.)**

3. Сколько нечётных четырёхзначных чисел k делится на $[\sqrt{k}]$? ($[\sqrt{k}]$ – целая часть числа $\sqrt{k}$, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{k}$) **(<u>69</u>. Делимость возможна только тогда, когда либо k, либо k+1 является квадратом целого числа. Так как $[\sqrt{k}] \le \sqrt{k} < [\sqrt{k}]+1$, имеем $([\sqrt{k}])^2 \le k < ([\sqrt{k}])^2+2\sqrt{k}+1$. Следовательно, если k делится на $[\sqrt{k}]$, то либо $k = ([\sqrt{k}])^2$, либо $k = ([\sqrt{k}])^2+[\sqrt{k}]$, либо $k = ([\sqrt{k}])^2+2[\sqrt{k}]$. Но случай $k = ([\sqrt{k}])^2+[\sqrt{k}] = [\sqrt{k}]([\sqrt{k}]+1)$ невозможен, ибо в этом случае k чётно, а в случае $k = ([\sqrt{k}])^2+2[\sqrt{k}]$ имеем $k+1 = ([\sqrt{k}]+1)^2$. Значит, k или k+1 будет точным квадратом от $1024=32^2$ до $10000=100^2$ – всего 100–31=69 вариантов числа k.)**

4. Сколько существует чётных четырёхзначных чисел с суммой цифр 10? **(<u>124</u>. Воспользуемся методом «шаров и перегородок», изначально положив один шарик в первый «ящик»-разряд (он отличен от нуля) и раскидывая соответственно в первые три «ящика»-разряда 9, 7, 5, 3 и 1 «шарика»-единицы, получая числа, оканчивающиеся на 0, 2, 4, 6 и 8 соответственно. При этом один случай (все шарики попали в первый разряд) не даст нам числа. Всего получим**

$$\overline{C_3^9}+\overline{C_3^7}+\overline{C_3^5}+\overline{C_3^3}+\overline{C_3^1}-1=C_{11}^9+C_9^7+C_7^5+C_5^3+C_3^1-1=\frac{11\cdot 10}{2}+\frac{9\cdot 8}{2}+\frac{7\cdot 6}{2}+\frac{5\cdot 4}{2}+3-1=$$
$$55+36+21+10+2=124.)$$

5. На диаметре окружности отмечена точка, делящая его на отрезки длиной 10 и 6. Хорда этой окружности, проходящая через отмеченную точку, проведена под углом в 60° к диаметру. Найдите длину хорды. ($2\sqrt{61}=\sqrt{244}$. **По теореме косинусов для треугольников OPC и OPD (см. рис.) получим, что $64=x^2+2x+4=y^2-2y+4$, откуда $(x+1)^2=(y-1)^2 \Leftrightarrow y=x+2$ (x>0, y>4) и $x=\sqrt{61}-1$, значит, $x+y=2x+2=2\sqrt{61}$.)**



6. Натуральное число назовём *незначительным*, если все его простые делители меньше 33. Натуральный делитель d натурального числа

n назовём *значительным*, если $\sqrt{n}<d<n$. У скольких незначительных натуральных чисел ровно один значительный делитель? **(**$77=C_{11}^2+2\cdot 11$**. Упорядочим все натуральные делители числа n по возрастанию: $1=d_1<d_2<\ldots<d_k$, где $k=\tau(n)$ – количество различных натуральных делителей. Как известно, делители разбиваются на симметричные пары относительно середины этого ряда, где в каждой паре делители дают в произведении n. Если $k\geq 6$, то делители под номерами k–1 и k–2 точно будут значительными, т.к. каждый их них больше $\sqrt{n}$. Если k=5, то $n=p^4$ (p – простое) и имеет ровно один значительный делитель p^3 (имеем 11 незначительных чисел, для каждого из 11 простых чисел, меньших 33). Если k=4, то $n=p^3$ (p – простое) и имеет ровно один значительный делитель p^2 (ещё 11 незначительных чисел), или $n=pq$ ($p<q$ – различные простые числа) и имеет ровно один значительный делитель q (всего $55=C_{11}^2$ незначительных чисел – для каждой пары из 11 простых чисел). Если k=3 и k=2, то соответственно $n=p^2$ и $n=p$ (p – простое) не имеют значительных делителей.)**

7. Квадрат 1001×1001 без угловой клетки разбивают на клетчатые прямоугольники так, чтобы произведение их площадей было максимальным. Чему равно это произведение? **(**$\underline{2^3\cdot 3^{333998}}$**, см. решение аналогичной задачи 15)**

8. В треугольнике стороны имеют целые длины и известны косинусы всех углов: $\frac{19}{30}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{10}$. Какой наименьший периметр может иметь такой треугольник? **(<u>21</u>. Синусы углов треугольника равны соответственно $\frac{7\sqrt{11}}{30}, \frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{3\sqrt{11}}{10}$, тогда по теореме синусов для треугольника со сторонами a, b, c после сокращения на $\frac{\sqrt{11}}{2}$ получим, что $\frac{15a}{7}=\frac{3b}{1}=\frac{5c}{3}$, откуда a кратно 7, c кратно 3 и их наименьшие значения, дающие равенство, a=7, c=9, значит, b=5, а наименьший периметр равен 7+5+9=21, причём треугольник с такими сторонами существует, т.к. 9<7+5.)**

9. Сколько существует пар натуральных чисел (a, b) таких, что одно из них равно 2022 и существует натуральное число n, для которого выполняется условие: сумма цифр числа n равна a^2, а сумма цифр числа n+1 равна b^2? **(<u>449 пар</u>. Если n не оканчивается на 9, то у n+1 сумма цифр будет только на 1 больше, чем у числа n, но не существует отличающихся на 1 квадратов натуральных чисел. Значит, n оканчивается на 9 (точнее, на k девяток), тогда $S(n)–S(n+1)=9k–1=a^2–b^2\equiv–1 \pmod 9$, где, во-первых, $a>b$, во-вторых, перебор остатков по модулю 9 показывает, что такое возможно только при a, кратном 3, и b, имеющем остаток ±1 (1 и 8) при делении на 9, причём для каждой такой пары однозначно находится $k=(a^2–b^2+1)/9$, после чего строим подходящее нам число n, например, вида 11…199…9, где на конце ровно k девяток, а количество единиц равно $a^2–9k$ (возможно, 0 единиц). Значит, a=2022 (кратно 3) и существует ровно 2·[2022:9]+1=449 нужных значений для b, т.к. в каждой девятке будет ровно по 2 числа, сравнимых с ±1 по модулю 9, плюс число 2017.)**

10. На диагонали шахматной доски, идущей из левого нижнего угла (a1) в правый верхний (h8), стоят 8 фишек. За один ход можно выбрать 2 фишки и одну сдвинуть на одну клетку вправо, а другую — на одну клетку вверх (если соответствующие клетки свободны). Через несколько ходов 7 фишек оказались в клетках e8, f8, g8, h8, f7, g7, h7. Где к этому моменту могла оказаться 8-я фишка? **(<u>g1 или h2</u>. Введём обычную систему координат и заметим, что изначально сумма координат всех 8 фишек по горизонтальной оси («X») равна сумме координат по вертикальной оси («Y»), а за каждый ход обе суммы увеличиваются на 1, значит, они всегда будут равны между собой. В предлагаемой конечной позиции сумма координат 7 известных фишек по «X» 2·(6+7+8)+5=47 на 6 меньше суммы координат по оси «Y» 4·8+3·7)=53, значит, 8-я фишка должна иметь**

по «*X*» координату на 6 больше, т.е. либо это клетка (7, 1), либо клетка (8, 2), которые соответствуют клеткам *g*1 и *h*2, причём для обоих случаев строится пример.)

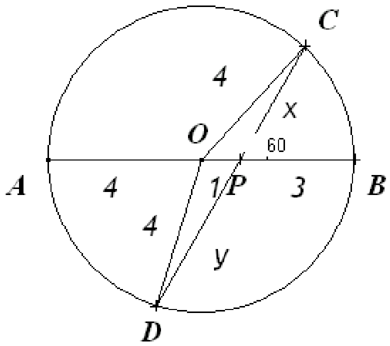
11. Сколько нечётных трёхзначных чисел k делится на $[\sqrt{k}]$? ($[\sqrt{k}]$ – целая часть числа $\sqrt{k}$, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{k}$) (**<u>21</u>. Делимость возможна только тогда, когда либо *k*, либо *k*+1 является квадратом целого числа. Так как $[\sqrt{k}] \le \sqrt{k} < [\sqrt{k}]+1$, имеем $([\sqrt{k}])^2 \le k < ([\sqrt{k}])^2+2\sqrt{k}+1$. Следовательно, если *k* делится на $[\sqrt{k}]$, то либо $k = ([\sqrt{k}])^2$, либо $k = ([\sqrt{k}])^2+[\sqrt{k}]$, либо $k = ([\sqrt{k}])^2+2[\sqrt{k}]$. Но случай $k = ([\sqrt{k}])^2+[\sqrt{k}] = [\sqrt{k}]([\sqrt{k}]+1)$ невозможен, ибо в этом случае *k* чётно, а в случае $k = ([\sqrt{k}])^2+2[\sqrt{k}]$ имеем $k+1 = ([\sqrt{k}]+1)^2$. Значит, *k* или *k*+1 будет точным квадратом от $121=11^2$ до $961=31^2$ – всего 31–10=21 вариант числа *k*.)**

12. Сколько существует нечётных четырёхзначных чисел с суммой цифр 11? (**<u>124</u>. Воспользуемся методом «шаров и перегородок», изначально положив один шарик в первый «ящик»-разряд (он отличен от нуля) и раскидывая соответственно в первые три «ящика»-разряда 9, 7, 5, 3 и 1 «шарики»-единицы, получая числа, оканчивающиеся на 1, 3, 5, 7 и 9 соответственно. При этом один случай (все шарики попали в первый разряд) не даст нам числа. Всего получим**

$$\overline{C_3^9}+\overline{C_3^7}+\overline{C_3^5}+\overline{C_3^3}+\overline{C_3^1}-1=C_{11}^9+C_9^7+C_7^5+C_5^3+C_3^1-1=\frac{11\cdot10}{2}+\frac{9\cdot8}{2}+\frac{7\cdot6}{2}+\frac{5\cdot4}{2}+3-1=$$

$55+36+21+10+2=124$. ***<u>Комментарий</u>: Заметим, что и нечётных четырёхзначных чисел с суммой цифр 10, и чётных четырёхзначных чисел с суммой цифр 11 (см. задачу 4) будет поровну, т.к. они разбиваются на пары (чётное-нечётное) чисел, отличающихся на 1.*)**

13. На диаметре окружности отмечена точка, делящая его на отрезки длиной 5 и 3. Хорда этой окружности, проходящая через отмеченную точку, проведена под углом в 60° к диаметру. Найдите длину хорды. (<u>$\sqrt{61}$</u>. **По теореме косинусов для треугольников *OPC* и *OPD* получим, что $16=x^2+x+1=y^2-y+1$, откуда $(x+0,5)^2=(y-0,5)^2 \Leftrightarrow y=x+1$ ($x>0$, $y>4$) и $x+\frac{1}{2}=\sqrt{16-\frac{3}{4}} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{61}-1}{2}$, значит, $x+y=2x+1=\sqrt{61}$.)**



14. Натуральное число назовём *незначительным*, если все его простые делители меньше 100. Натуральный делитель d натурального числа n назовём *значительным*, если $\sqrt{n}<d<n$. У скольких незначительных натуральных чисел ровно один значительный делитель? ($350=C_{25}^2+2\cdot25$. **Упорядочим все натуральные делители числа *n* по возрастанию: $1=d_1<d_2<\ldots<d_k$, где $k=\tau(n)$ – количество различных натуральных делителей. Как известно, делители разбиваются на симметричные пары относительно середины этого ряда, где в каждой паре делители дают в произведении *n*. Если $k\ge6$, то делители под номерами $k-1$ и $k-2$ точно будут значительными, т.к. каждый их них больше $\sqrt{n}$. Если $k=5$, то $n=p^4$ (*p* – простое) и имеет ровно один значительный делитель p^3 (имеем 25 незначительных чисел, для каждого из 25 простых чисел, меньших 100). Если $k=4$, то $n=p^3$ (*p* – простое) и имеет ровно один значительный делитель p^2 (ещё 25 незначительных чисел), или $n=pq$ ($p<q$ – различные простые числа) и имеет ровно один значительный делитель *q* (всего $300=C_{25}^2$ незначительных чисел – для**

каждой пары из 25 простых чисел). Если k=3 и k=2, то соответственно $n=p^2$ и $n=p$ (p – простое) не имеют значительных делителей.)

15. Квадрат 101×101 без угловой клетки разбивают на клетчатые прямоугольники так, чтобы произведение их площадей было максимальным. Чему равно это произведение? **(*Комментарий:* *Фактически (но с некоторым тонким моментом) речь идёт о классической задаче – разбить натуральное число (у нас 101^2–1=10200) на натуральные слагаемые с наибольшим возможным произведением. Как известно, результат равен степени тройки, возможно умноженной на 2 или 2^2 в зависимости от остатка (2 и 1) при делении на 3 исходного числа.* *Ответ:* наибольшее произведение равно $2^3 \cdot 3^{3398}$. *Решение:* Сведём задачу к общей формулировке, описанной в комментарии. Сначала все 1 добавим к какому-нибудь числу (произведение станет больше). Если у нас есть число $n \geq 5$, то заменим его числами 3 и (n–3), тогда $3\cdot(n-3)>n$ (что равносильно условию $n>4{,}5$, т.е. $n \geq 5$) и произведение станет больше. Число 4 заменим на две 2 – произведение останется прежним. Таким образом, у нас остались только 2 и 3. Если есть хотя бы три двойки, то заменим их на две тройки и произведение станет больше, т.к. $2^3=8<9=3^2$. Значит, всё наше произведение будет равно степени 3, умноженной на одну или две двойки, в зависимости от остатка при делении на 3 (2 или 1). Но у нас число 10200 кратно 3, значит, наибольшее произведение будет равно 3^{3400}. Однако разбить на триминошки квадрат 101×101 без угловой клетки не удастся. Если раскрасить поле диагональной раскраской в 3 цвета, то у нас второго цвета будет на 1 клетку больше, значит, одна из них и будет свободной клеткой, т.к. каждая триминошка содержит по одной клетке каждого цвета. Но точно также это должна быть клетка второго цвета при диагональной раскраске в три цвета другого направления. Угловые клетки не могут быть одновременно цвета 2 при обеих раскрасках. Значит, мы должны иметь ещё и не тройки. Если мы две тройки заменим на три двойки, то они дадут вклад в произведение, равный 8. Если мы одну тройку заменим на 1 и 2, то вклад вместе с одной тройкой в произведение будет равен 3·1·2=6. Значит, нам надо иметь 3 двойки и 3400–2=3398 троек. Тогда максимальное произведение равно $2^3 \cdot 3^{3398}$. Причём пример разрезания есть. Сначала выделим зону 99×101, которая очевидным образом разрезается на прямоугольники 1×3 вдоль стороны 99, кратной 3. Далее остаются полоска 1×101, которую режем на 33 триминошки и одну доминошку, и полоска 1×100, которую режем на 32 триминошки и две доминошки. Таким образом, мы разрезали квадрат 101×101 без угловой клетки на 3 доминошки 1×2 и 3398 триминошек 1×3, что нам и требовалось.)**

16. В треугольнике стороны имеют целые длины и известны косинусы всех углов: $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{11}{14}$. Какой наименьший периметр может иметь такой треугольник? **(20. Синусы углов треугольника равны соответственно $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{4\sqrt{3}}{7}, \frac{5\sqrt{3}}{14}$, тогда по теореме синусов для треугольника со сторонами a, b, c после сокращения на $\sqrt{3}$ получим, что $2a=\frac{7b}{4}=\frac{14c}{5}$, откуда b кратно 4, c кратно 5 и их наименьшие значения, дающие равенство, b=8, c=5, значит, a=7, а наименьший периметр равен 7+8+5=20, причём треугольник с такими сторонами существует, т.к. 8<7+5.)**