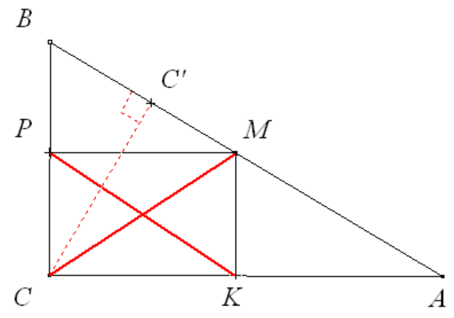
XVIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XV Турнир математических игр. Математическая игра «Пенальти».
<u>Средняя лига (9 класс).</u>* <u>Решения</u>. *11 сентября 2022 года.

1. Натуральное число назовём *шестичным*, если оно делится на 6, но в своей десятичной записи не содержит 6. Сколько существует пятизначных шестичных чисел? **(<u>$7776=6^5$</u>. Последняя цифра обязательно чётна – 4 варианта (без 6-ки), тем самым мы гарантируем делимость на 2. Первая цифра – 8 вариантов (любая цифра, кроме 0 и 6), вторая и третья – по 9 вариантов (любая цифра, кроме 6). Четвёртая цифра всегда определяется 3 способами в зависимости от остатка при делении на 3 суммы уже поставленных четырёх цифр – это цифра либо из набора (0, 3, 9), либо из набора (1, 4, 7), либо из набора (2, 5, 8), чтобы дополнить всю сумму цифр до кратной 3. Тем самым мы имеем делимость и на 2, и на 3, значит, и на $6=2\cdot3$. Тогда всего $4\cdot8\cdot9\cdot9\cdot3=7776$ пятизначных шестичных чисел.)**

2. На диагонали шахматной доски, идущей из левого нижнего угла ($a1$) в правый верхний ($h8$), стоят 8 фишек. За один ход можно выбрать 2 фишки и одну сдвинуть на одну клетку вправо, а другую — на одну клетку вверх (если соответствующие клетки свободны). Через несколько ходов 7 фишек оказались в клетках $h5$, $h6$, $h7$, $h8$, $g6$, $g7$, $g8$. Где к этому моменту могла оказаться 8-я фишка? **(<u>*a*7 или *b*8</u>. Введём обычную систему координат и заметим, что изначально сумма координат всех 8 фишек по горизонтальной оси («*X*») равна сумме координат по вертикальной оси («*Y*»), а за каждый ход обе суммы увеличиваются на 1, значит, они всегда будут равны между собой. В предлагаемой конечной позиции сумма координат 7 известных фишек по «*Y*» $2\cdot(6+7+8)+5=47$ на 6 меньше суммы координат по оси «*X*» $4\cdot8+3\cdot7)=53$, значит, 8-я фишка должна иметь по «*Y*» координату на 6 больше, т.е. либо это клетка (1, 7), либо клетка (2, 8), которые соответствуют клеткам *a*7 и *b*8, причём для обоих случаев строится пример.)**

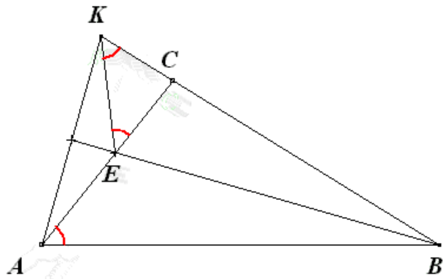
3. На стороне $AB=13$ треугольника ABC выбирают произвольно точку M и из неё опускают перпендикуляры MK и MP на стороны $BC=5$ и $CA=12$ соответственно. Рассмотрим положение точки M, когда длина отрезка PK будет наименьшей из возможных (равна m). Найдите наименьшее натуральное число n такое, что mn будет целым числом. **(<u>13</u>. Согласно теореме Пифагора треугольник *ABC* – прямоугольный, т.к. $5^2+12^2=13^2$. *M* – основание *C'* высоты *CC'*. Действительно, учитывая равенство диагоналей *CM* и *PK* прямоугольника *PCKM*, получаем, что длина *m* отрезка *PK* будет наименьшей при условии, что *CM* – наименьший отрезок, а это высота треугольника *ABC*. При выборе любой другой точки *M* на гипотенузе *AB*, получим прямоугольный треугольник *CC'M*, в котором *CC'* – катет, а *CM* - гипотенуза. Значит, $m=2S/AB=(BC\cdot CA)/AB=(5\cdot12)/13$, откуда $n=13$.)**



4. Сколько существует чётных четырёхзначных чисел с суммой цифр 10? **(<u>124</u>. Воспользуемся методом «шаров и перегородок», изначально положив один шарик в первый «ящик»-разряд (он отличен от нуля) и раскидывая соответственно в первые три «ящика»-разряда 9, 7, 5, 3 и 1 «шарика»-единицы, получая числа, оканчивающиеся на 0, 2, 4, 6 и 8 соответственно. При этом один случай (все шарики попали в первый разряд) не даст нам числа. Всего получим**

$\overline{C_3^9}+\overline{C_3^7}+\overline{C_3^5}+\overline{C_3^3}+\overline{C_3^1}-1=C_{11}^9+C_9^7+C_7^5+C_5^3+C_3^1-1=\frac{11\cdot 10}{2}+\frac{9\cdot 8}{2}+\frac{7\cdot 6}{2}+\frac{5\cdot 4}{2}+3-1=$
$55+36+21+10+2=124$**.)**

5. В треугольнике *ABC* провели биссектрису *BE*. Оказалось, что *BC*+*CE*=*AB*. Чему может быть равен наибольший угол этого треугольника, если один из углов равен 42°? **(<u>84°, 92° или 117°</u>. Рассмотрим на продолжении отрезка *BC* за точку *C* такую точку *K*, что *BK*=*BA*. Тогда *CK*=*BK*–*BC*=*AB*–*BC*=*CE* и точка *K* симметрична *A* относительно биссектрисы *BE*. Пусть ∠*CAB*=∠*EAB*=α, тогда в силу симметрии ∠*EKC*=α, а в силу равнобедренности треугольника *CKE* получим ∠*CEK*=α, значит, внешний угол *ACB* треугольника *CKE* равен 2α. Тогда возможны три случая углов треугольника *ABC*. 1) ∠*A*=α=42°, ∠*C*=2α=84°, ∠*B*=180°–42°–84°=54°. 2) ∠*C*=2α=42°, ∠*A*=α=21°, ∠*B*=180°–42°–21°=117°. 3) ∠*B*=42°, ∠*A*+∠*C*=3α=180°–42°=138°, откуда ∠*A*=α=138°/3=46°, ∠*C*=2α=92°. Причём во всех трёх случаях соответствующий треугольник с требуемым условием существует.)**



6. Натуральное число назовём *незначительным*, если все его простые делители меньше 33. Натуральный делитель *d* натурального числа *n* назовём *значительным*, если $\sqrt{n}<d<n$. У скольких незначительных натуральных чисел ровно один значительный делитель? **(<u>$77=C_{11}^2+2\cdot 11$</u>. Упорядочим все натуральные делители числа *n* по возрастанию: $1=d_1<d_2<\ldots<d_k$, где $k=\tau(n)$ – количество различных натуральных делителей. Как известно, делители разбиваются на симметричные пары относительно середины этого ряда, где в каждой паре делители дают в произведении *n*. Если *k*≥6, то делители под номерами *k*–1 и *k*–2 точно будут значительными, т.к. каждый их них больше $\sqrt{n}$. Если *k*=5, то $n=p^4$ (*p* – простое) и имеет ровно один значительный делитель p^3 (имеем 11 незначительных чисел, для каждого из 11 простых чисел, меньших 33). Если *k*=4, то $n=p^3$ (*p* – простое) и имеет ровно один значительный делитель p^2 (ещё 11 незначительных чисел), или *n*=*pq* (*p*<*q* – различные простые числа) и имеет ровно один значительный делитель *q* (всего $55=C_{11}^2$ незначительных чисел – для каждой пары из 11 простых чисел). Если *k*=3 и *k*=2, то соответственно $n=p^2$ и *n*=*p* (*p* – простое) не имеют значительных делителей.)**

7. Квадрат 1001×1001 без угловой клетки разбивают на клетчатые прямоугольники так, чтобы произведение их площадей было максимальным. Чему равно это произведение? **(<u>$2^3\cdot 3^{333998}$</u>, см. решение аналогичной задачи 15)**

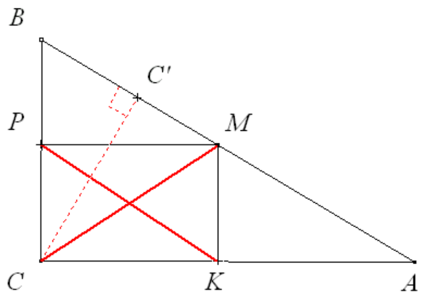
8. Правильные многоугольники с 7, 8, 9, 10 и 11 вершинами вписаны в одну окружность. Никакие два из них не имеют общую вершину, никакие три их стороны не пересекаются в одной точке. В каком наибольшем количестве точек могут пересекаться стороны этих многоугольников? **(<u>160</u>=2·(7·4+8·3+9·2+10), т.к. каждая сторона каждого меньшего многоугольника пересекает границу большего многоугольника ровно в 2 точках)**

9. Натуральное число назовём *шестичным*, если оно делится на 6, но в своей десятичной записи не содержит 6. Сколько существует шестизначных шестичных чисел? **(<u>69984</u>. Последняя цифра обязательно чётна – 4 варианта (без 6-ки), тем самым мы гарантируем делимость на 2. Первая цифра – 8 вариантов (любая цифра, кроме 0 и 6), вторая, третья, четвёртая – по 9 вариантов (любая цифра, кроме 6). Пятая цифра всегда определяется 3 способами в зависимости от остатка при делении на 3 суммы уже поставленных пяти цифр – это цифра либо из набора (0, 3, 9), либо из набора (1, 4, 7), либо из набора (2, 5, 8), чтобы дополнить всю сумму цифр до кратной 3. Тем самым**

мы имеем делимость и на 2, и на 3, значит, и на 6=2·3. Тогда всего 4·8·9·9·9·3=69984 шестизначных шестичных чисел.)

10. На диагонали шахматной доски, идущей из левого нижнего угла (a1) в правый верхний (h8), стоят 8 фишек. За один ход можно выбрать 2 фишки и одну сдвинуть на одну клетку вправо, а другую — на одну клетку вверх (если соответствующие клетки свободны). Через несколько ходов 7 фишек оказались в клетках e8, f8, g8, h8, f7, g7, h7. Где к этому моменту могла оказаться 8-я фишка? **(<u>*g*1 или *h*2</u>. Введём обычную систему координат и заметим, что изначально сумма координат всех 8 фишек по горизонтальной оси («*X*») равна сумме координат по вертикальной оси («*Y*»), а за каждый ход обе суммы увеличиваются на 1, значит, они всегда будут равны между собой. В предлагаемой конечной позиции сумма координат 7 известных фишек по «*X*» 2·(6+7+8)+5=47 на 6 меньше суммы координат по оси «*Y*» 4·8+3·7)=53, значит, 8-я фишка должна иметь по «*X*» координату на 6 больше, т.е. либо это клетка (7, 1), либо клетка (8, 2), которые соответствуют клеткам *g*1 и *h*2, причём для обоих случаев строится пример.)**

11. На стороне AB=10 треугольника ABC выбирают произвольно точку M и из неё опускают перпендикуляры MK и MP на стороны BC=6 и CA=8 соответственно. Рассмотрим положение точки M, когда длина отрезка PK будет наименьшей из возможных (равна m). Найдите наименьшее натуральное число n такое, что mn будет целым числом. **(<u>5</u>. Согласно теореме Пифагора треугольник *ABC* – прямоугольный, т.к. $6^2+8^2=10^2$. *M* – основание *C'* высоты *CC'*. Действительно, учитывая равенство диагоналей *CM* и *PK* прямоугольника *PCKM*, получаем, что длина *m* отрезка *PK* будет наименьшей при условии, что *CM* – наименьший отрезок, а это высота треугольника *ABC*. При выборе любой другой точки *M* на гипотенузе *AB*, получим прямоугольный треугольник *CC'M*, в котором *CC'* – катет, а *CM* - гипотенуза. Значит, *m*=2*S*/*AB*=(*BC*·*CA*)/*AB*=(6·8)/10=24/5, откуда *n*=5.)**

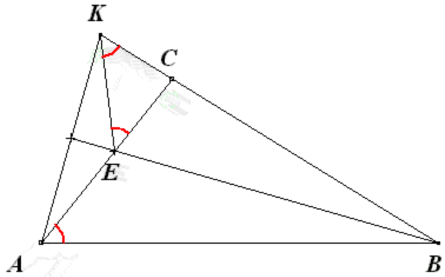


12. Сколько существует нечётных четырёхзначных чисел с суммой цифр 11? **(<u>124</u>. Воспользуемся методом «шаров и перегородок», изначально положив один шарик в первый «ящик»-разряд (он отличен от нуля) и раскидывая соответственно в первые три «ящика»-разряда 9, 7, 5, 3 и 1 «шарики»-единицы, получая числа, оканчивающиеся на 1, 3, 5, 7 и 9 соответственно. При этом один случай (все шарики попали в первый разряд) не даст нам числа. Всего получим**

$$\overline{C_3^9}+\overline{C_3^7}+\overline{C_3^5}+\overline{C_3^3}+\overline{C_3^1}-1=C_{11}^9+C_9^7+C_7^5+C_5^3+C_3^1-1=\frac{11\cdot10}{2}+\frac{9\cdot8}{2}+\frac{7\cdot6}{2}+\frac{5\cdot4}{2}+3-1=$$

$55+36+21+10+2=124$. ***<u>Комментарий</u>: Заметим, что и нечётных четырёхзначных чисел с суммой цифр 10, и чётных четырёхзначных чисел с суммой цифр 11 (см. задачу 4) будет поровну, т.к. они разбиваются на пары (чётное-нечётное) чисел, отличающихся на 1.*)**

13. В треугольнике ABC провели биссектрису BE. Оказалось, что $BC+CE=AB$. Чему может быть равен наибольший угол этого треугольника, если один из углов равен 54°? **(<u>84°, 99° или 108°</u>. Рассмотрим на продолжении отрезка *BC* за точку *C* такую точку *K*, что *BK*=*BA*. Тогда *CK*=*BK*–*BC*=*AB*–*BC*=*CE* и точка *K* симметрична *A* относительно биссектрисы *BE*. Пусть ∠*CAB*=∠*EAB*=α, тогда в силу симметрии ∠*EKC*=α, а в силу равнобедренности треугольника *CKE* получим ∠*CEK*=α, значит, внешний угол *ACB* треугольника *CKE* равен 2α. Тогда возможны три случая углов треугольника *ABC*. 1) ∠*A*=α=54°, ∠*C*=2α=108°, ∠*B*=180°–54°–108°=18°. 2) ∠*C*=2α=54°, ∠*A*=α=27°, ∠*B*=180°–54°–27°=99°. 3) ∠*B*=54°, ∠*A*+∠*C*=3α=180°–**



$54°=126°$, откуда $\angle A=\alpha=126°/3=42°$, $\angle C=2\alpha=84°$. Причём во всех трёх случаях соответствующий треугольник с требуемым условием существует.)

14. Натуральное число назовём *незначительным*, если все его простые делители меньше 100. Натуральный делитель d натурального числа n назовём *значительным*, если $\sqrt{n} < d < n$. У скольких незначительных натуральных чисел ровно один значительный делитель? **(**$\underline{350 = C_{25}^2 + 2\cdot 25}$**.**

Упорядочим все натуральные делители числа n по возрастанию: $1=d_1<d_2<\ldots<d_k$, где $k=\tau(n)$ – количество различных натуральных делителей. Как известно, делители разбиваются на симметричные пары относительно середины этого ряда, где в каждой паре делители дают в произведении n. Если $k\geq6$, то делители под номерами k–1 и k–2 точно будут значительными, т.к. каждый их них больше $\sqrt{n}$. Если $k=5$, то $n=p^4$ (p – простое) и имеет ровно один значительный делитель p^3 (имеем 25 незначительных чисел, для каждого из 25 простых чисел, меньших 100). Если $k=4$, то $n=p^3$ (p – простое) и имеет ровно один значительный делитель p^2 (ещё 25 незначительных чисел), или $n=pq$ ($p<q$ – различные простые числа) и имеет ровно один значительный делитель q (всего $300 = C_{25}^2$ незначительных чисел – для каждой пары из 25 простых чисел). Если $k=3$ и $k=2$, то соответственно $n=p^2$ и $n=p$ (p – простое) не имеют значительных делителей.)

15. Квадрат 101×101 без угловой клетки разбивают на клетчатые прямоугольники так, чтобы произведение их площадей было максимальным. Чему равно это произведение? **(*<u>Комментарий</u>*: *Фактически (но с некоторым тонким моментом) речь идёт о классической задаче – разбить натуральное число (у нас 101^2–1=10200) на натуральные слагаемые с наибольшим возможным произведением. Как известно, результат равен степени тройки, возможно умноженной на 2 или 2^2 в зависимости от остатка (2 и 1) при делении на 3 исходного числа. <u>Ответ</u>:* наибольшее произведение равно $2^3\cdot3^{3398}$. *<u>Решение</u>:* Сведём задачу к общей формулировке, описанной в комментарии. Сначала все 1 добавим к какому-нибудь числу (произведение станет больше). Если у нас есть число $n\geq5$, то заменим его числами 3 и (n–3), тогда $3\cdot(n-3)>n$ (что равносильно условию $n>4{,}5$, т.е. $n\geq5$) и произведение станет больше. Число 4 заменим на две 2 – произведение останется прежним. Таким образом, у нас остались только 2 и 3. Если есть хотя бы три двойки, то заменим их на две тройки и произведение станет больше, т.к. $2^3=8<9=3^2$. Значит, всё наше произведение будет равно степени 3, умноженной на одну или две двойки, в зависимости от остатка при делении на 3 (2 или 1). Но у нас число 10200 кратно 3, значит, наибольшее произведение будет равно 3^{3400}. Однако разбить на триминошки квадрат 101×101 без угловой клетки не удастся. Если раскрасить поле диагональной раскраской в 3 цвета, то у нас второго цвета будет на 1 клетку больше, значит, одна из них и будет свободной клеткой, т.к. каждая триминошка содержит по одной клетке каждого цвета. Но точно также это должна быть клетка второго цвета при диагональной раскраске в три цвета другого направления. Угловые клетки не могут быть одновременно цвета 2 при обеих раскрасках. Значит, мы должны иметь ещё и не тройки. Если мы две тройки заменим на три двойки, то они дадут вклад в произведение, равный 8. Если мы одну тройку заменим на 1 и 2, то вклад вместе с одной тройкой в произведение будет равен $3\cdot1\cdot2=6$. Значит, нам надо иметь 3 двойки и 3400–2=3398 троек. Тогда максимальное произведение равно $2^3\cdot3^{3398}$. Причём пример разрезания есть. Сначала выделим зону 99×101, которая очевидным образом разрезается на прямоугольники 1×3 вдоль стороны 99, кратной 3. Далее остаются полоска 1×101, которую режем на 33 триминошки и одну доминошку, и полоска 1×100, которую режем на 32 триминошки и две доминошки. Таким образом, мы разрезали квадрат 101×101 без угловой клетки на 3 доминошки 1×2 и 3398 триминошек 1×3, что нам и требовалось.)**

16. Правильные многоугольники с 7, 8, 9, 10, 11 и 12 вершинами вписаны в одну окружность. Никакие два из них не имеют общую вершину, никакие три их стороны не пересекаются в одной точке. В каком наибольшем количестве точек могут пересекаться стороны этих многоугольников? **(<u>250</u>=2·(7·5+8·4+9·3+10·2+11), т.к. каждая сторона каждого меньшего многоугольника пересекает границу большего многоугольника ровно в 2 точках)**