XVIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XV Турнир математических игр.
Математическая игра «Пенальти».
Старшая лига (10-11 классы). **Вариант 1**. ***11 сентября 2022 года.***

1. Найдите все пары натуральных чисел (a, b) таких, что существует натуральное число n, для которого выполняется условие: сумма цифр числа n равна a^2, а сумма цифр числа $n+1$ равна b^2.

2. На диагонали шахматной доски, идущей из левого нижнего угла ($a1$) в правый верхний ($h8$), стоят 8 фишек. За один ход можно выбрать 2 фишки и одну сдвинуть на одну клетку вправо, а другую — на одну клетку вверх (если соответствующие клетки свободны). Через несколько ходов 7 фишек оказались в клетках $h5$, $h6$, $h7$, $h8$, $g6$, $g7$, $g8$. Где к этому моменту могла оказаться 8-я фишка?

3. Сколько нечётных четырёхзначных чисел k делится на $[\sqrt{k}]$? ($[\sqrt{k}]$ – целая часть числа $\sqrt{k}$, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{k}$)

4. Сколько существует чётных четырёхзначных чисел с суммой цифр 10?

5. На диаметре окружности отмечена точка, делящая его на отрезки длиной 10 и 6. Хорда этой окружности, проходящая через отмеченную точку, проведена под углом в 60° к диаметру. Найдите длину хорды.

6. Натуральное число назовём *незначительным*, если все его простые делители меньше 33. Натуральный делитель d натурального числа n назовём *значительным*, если $\sqrt{n} < d < n$. У скольких незначительных натуральных чисел ровно один значительный делитель?

7. Квадрат 1001×1001 без угловой клетки разбивают на клетчатые прямоугольники так, чтобы произведение их площадей было максимальным. Чему равно это произведение?

8. В треугольнике стороны имеют целые длины и известны косинусы всех углов: $\frac{19}{30}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{10}$. Какой наименьший периметр может иметь такой треугольник?

XVIII Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XV Турнир математических игр.
Математическая игра «Пенальти».
<u>Старшая лига (10-11 классы)</u>*. <u>**Вариант 2**</u>. *11 сентября 2022 года.

9. Сколько существует пар натуральных чисел (a, b) таких, что одно из них равно 2022 и существует натуральное число n, для которого выполняется условие: сумма цифр числа n равна a^2, а сумма цифр числа n+1 равна b^2?

10. На диагонали шахматной доски, идущей из левого нижнего угла (a1) в правый верхний (h8), стоят 8 фишек. За один ход можно выбрать 2 фишки и одну сдвинуть на одну клетку вправо, а другую — на одну клетку вверх (если соответствующие клетки свободны). Через несколько ходов 7 фишек оказались в клетках e8, f8, g8, h8, f7, g7, h7. Где к этому моменту могла оказаться 8-я фишка?

11. Сколько нечётных трёхзначных чисел k делится на $[\sqrt{k}\,]$? ($[\sqrt{k}\,]$ – целая часть числа $\sqrt{k}$, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{k}$)

12. Сколько существует нечётных четырёхзначных чисел с суммой цифр 11?

13. На диаметре окружности отмечена точка, делящая его на отрезки длиной 5 и 3. Хорда этой окружности, проходящая через отмеченную точку, проведена под углом в 60° к диаметру. Найдите длину хорды.

14. Натуральное число назовём *незначительным*, если все его простые делители меньше 100. Натуральный делитель d натурального числа n назовём *значительным*, если $\sqrt{n} < d < n$. У скольких незначительных натуральных чисел ровно один значительный делитель?

15. Квадрат 101×101 без угловой клетки разбивают на клетчатые прямоугольники так, чтобы произведение их площадей было максимальным. Чему равно это произведение?

16. В треугольнике стороны имеют целые длины и известны косинусы всех углов: $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{11}{14}$. Какой наименьший периметр может иметь такой треугольник?