

Шестнадцатый Южный математический турнир

Сириус, 1–9.10.2021

Блиц-бой. 2 октября 2021 г.

1. Все натуральные числа, в записи которых встречаются только нечётные цифры, выписаны в порядке возрастания. Какое число стоит на 2021 месте?

2. Диагонали трапеции разбивают её на четыре треугольника. Сумма площадей треугольников, примыкающих к основаниям трапеции, составляет $13/18$ площади всей трапеции. Длина одного из оснований равна 5. Чему может быть равна длина другого основания?

3. Какой остаток даёт число $21^{21^{21}}$ при делении на 125?

4. На сторонах AC и AB треугольника ABC расположены точки D и E соответственно так, что BD – биссектриса угла B и четырёхугольник $BCDE$ вписанный. Отрезки BD и CE пересекаются в точке P . Известно, что $BP = 12$ и $PE = 4$. Найдите отношение $\frac{AC}{AE}$.

5. Решите в вещественных числах систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6y - 4x + 12, \\ 4y = x^2 + 4x + 12. \end{cases}$$

6. Числа $1, x, y$ образуют геометрическую прогрессию, а числа $x, y, 3$ – арифметическую (члены в обеих прогрессиях идут в указанном порядке). Найдите наибольшее возможное значение суммы $x + y$.

7. В последовательности (a_n) натуральных чисел $a_1 = 1$, а при $n \geq 2$ число a_n – это наименьшее положительное число вида $n - a_k^2$, $1 \leq k \leq n - 1$. Найдите $a_1 + a_2 + \dots + a_{50}$.

8. Функция f определена и удовлетворяет условию $f(n) = f(n-1)f(n-2)$ при всех целых n . Известно, что $f(n) > 0$ для всех натуральных n , $f(1) = \frac{f(2)}{512}$ и $\frac{1}{f(1)} = 2f(2)$. Найдите $f(f(4))$.