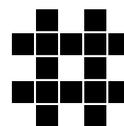


Командная олимпиада Старт-лиги

1. Разрежьте на 4 клетчатых многоугольника (не все одинаковые) фигуру, изображённую на рисунке, и сложите из них квадрат.



2. Про кратное 99 четырёхзначное число известно, что сумма квадратов цифр, стоящих на нечётных местах, равна сумме квадратов цифр, стоящих на чётных местах. Докажите, что произведение цифр на нечётных местах равно произведению цифр на чётных местах.

3. В таблице 10×10 , все клетки которой заполнены числами $+1$ и -1 ровно k строк с положительной суммой и ровно k столбцов с отрицательной суммой. При каком наибольшем k такое возможно?

4. В треугольнике ABC $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, K и L – середины сторон AB и AC соответственно. Во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники AKM и CLN . Докажите, что $BN = CM$.

5. Пешки решили примерить на себя короны, но от этого, конечно же, ни ферзями, ни королями не смогли стать. Теперь одна часть пешек бьёт клетки (по вертикали и горизонтали) не далее, чем на 2 клетки, а другая часть – по диагонали не далее, чем на 2 клетки. Какой вид пешек надо выбрать, чтобы на доску 10×10 можно было поставить как можно больше не бьющих друг друга пешек? И какое наибольшее количество пешек этого вида можно поставить?

6. На доске написано 2021 натуральное число, причём для любых 1010 написанных чисел среди остальных найдётся число, взаимно простое с каждым из них. Докажите, что есть написанное число, взаимно простое с каждым из остальных.

7. Действительное число x таково, что число $x[x] + [x]\{x\} + \{x\}x$ – целое. Верно ли, что x – обязательно целое? Напоминаем, что $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x (целая часть), $\{x\} = x - [x]$ (дробная часть).

8. Дано натуральное число $n \geq 3$. Петя задумал натуральное число, не превосходящее n , а Вася (которому известно n) пытается его угадать. Каждым своим ходом Вася называет число. Если оно совпадает с Петиним числом, тот говорит «угадал», и игра заканчивается, а если нет, то Петя изменяет (уменьшает или увеличивает) своё число на 1. Петино число всегда остаётся натуральным, но может стать больше n . Докажите, что Вася сумеет угадать Петино число не более чем за $3n - 5$ попыток.