

Шестнадцатый Южный математический турнир

Сириус, 1–9.10.2021

Командная олимпиада. 2 октября 2021 г.

Старшие лиги

1. В таблице 10×10 , все клетки которой заполнены числами $+1$ и -1 , ровно k строк с положительной суммой и ровно k столбцов с отрицательной суммой. При каком наибольшем k такое возможно?

2. Дан пятиугольник $ABCDE$, в котором $BC \parallel AE$, $BC = \frac{1}{2}AE$, $DE \parallel AB$ и $DE = \frac{1}{2}AB$. Докажите, что $CD \parallel BE$ и $CD = \frac{1}{2}BE$.

3. Найдите все тройки натуральных чисел (m, n, p) , где p – простое и $m^4 = 4(p^n - 1)$.

4. Дано натуральное $n \geq 3$. Арним задумал натуральное число, не превосходящее n , а Брентано (которому известно n) пытается его угадать. Каждым ходом Брентано называет число. Если оно совпадает с числом Арнима, тот говорит "угадал", и игра заканчивается, а если нет, Арним изменяет (уменьшает или увеличивает) своё число на 1. Число Арнима всегда остаётся натуральным, но может стать больше n . Докажите, что Брентано сумеет угадать число Арнима за $3n - 5$ попыток.

5. Докажите, что

$$\frac{a^3 + 3b^3}{5a + b} + \frac{b^3 + 3c^3}{5b + c} + \frac{c^3 + 3a^3}{5c + a} \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

при всех положительных a, b, c .

6. Внутри треугольника ABC с описанной окружностью ω выбрана точка P . Прямые AP, BP, CP пересекают стороны BC, CA, AB в точках D, E, F , соответственно. Точка M – середина стороны BC , описанная окружность треугольника AEF пересекает ω в точке S , луч SD пересекает ω в точке X . Наконец, луч XM пересекает ω в точке Y . Докажите, что прямая AU касается описанной окружности треугольника AEF .

7. Дано множество S из 68 натуральных чисел, не превосходящих 2021. Докажите, что из множества S можно выбрать три непересекающихся подмножества, у которых равны количества элементов и суммы элементов.

8. Докажите, что для любого нечётного простого числа p количество натуральных n , для которых $n! + 1$ делится на p , не превосходит $cp^{2/3}$, где c – некоторая константа, не зависящая от p .

Шестнадцатый Южный математический турнир

Сириус, 1–9.10.2021

Командная олимпиада. 2 октября 2021 г.

Старшие лиги

1. В таблице 10×10 , все клетки которой заполнены числами $+1$ и -1 , ровно k строк с положительной суммой и ровно k столбцов с отрицательной суммой. При каком наибольшем k такое возможно?

2. Дан пятиугольник $ABCDE$, в котором $BC \parallel AE$, $BC = \frac{1}{2}AE$, $DE \parallel AB$ и $DE = \frac{1}{2}AB$. Докажите, что $CD \parallel BE$ и $CD = \frac{1}{2}BE$.

3. Найдите все тройки натуральных чисел (m, n, p) , где p – простое и $m^4 = 4(p^n - 1)$.

4. Дано натуральное $n \geq 3$. Арним задумал натуральное число, не превосходящее n , а Брентано (которому известно n) пытается его угадать. Каждым ходом Брентано называет число. Если оно совпадает с числом Арнима, тот говорит "угадал", и игра заканчивается, а если нет, Арним изменяет (уменьшает или увеличивает) своё число на 1. Число Арнима всегда остаётся натуральным, но может стать больше n . Докажите, что Брентано сумеет угадать число Арнима за $3n - 5$ попыток.

5. Докажите, что

$$\frac{a^3 + 3b^3}{5a + b} + \frac{b^3 + 3c^3}{5b + c} + \frac{c^3 + 3a^3}{5c + a} \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

при всех положительных a, b, c .

6. Внутри треугольника ABC с описанной окружностью ω выбрана точка P . Прямые AP, BP, CP пересекают стороны BC, CA, AB в точках D, E, F , соответственно. Точка M – середина стороны BC , описанная окружность треугольника AEF пересекает ω в точке S , луч SD пересекает ω в точке X . Наконец, луч XM пересекает ω в точке Y . Докажите, что прямая AU касается описанной окружности треугольника AEF .

7. Дано множество S из 68 натуральных чисел, не превосходящих 2021. Докажите, что из множества S можно выбрать три непересекающихся подмножества, у которых равны количества элементов и суммы элементов.

8. Докажите, что для любого нечётного простого числа p количество натуральных n , для которых $n! + 1$ делится на p , не превосходит $cp^{2/3}$, где c – некоторая константа, не зависящая от p .