XVIII Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 19–25.09.2023

Юниор-лига. 1 тур. 20.09.2023

1. O — центр описанной окружности Ω остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Прямые BC и AO пересекаются в точке E. Через точку E перпендикулярно к AE провели прямую l, которая пересекла прямые AB и AC в точках K и L соответственно. Обозначим через ω описанную окружность треугольника AKL. Продолжение высоты AD треугольника ABC пересекает ω в точке X. Докажите, что Ω, ω и окружность, описанная около треугольника DEX, имеют общую точу.

2. Клетчатый квадрат 8×8 составлен из палочек длиной в сторону клетки. Какое наименьшее количество палочек нужно убрать, чтобы оставшиеся не образовывали ни одного прямоугольника?

3. Найдите все пары (p, n) такие, что $n > p$, число n — натуральное, число p — простое и n^{n-p} является n-й степенью натурального числа.

4. Найдите все тройки действительных чисел x, y, z, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} x+y=z^4, \\ y+z=x^4, \\ z+x=y^4. \end{cases}$$

5. Чтобы открыть волшебный сундук, необходимо произнести магический код длиной n, состоящий из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Каждый раз, когда Али-Баба называет придуманный им код, болтливый страж сундука в ответ называет количество точно угаданных позиций. (Например, если магический код равен 0423, а Али-Баба говорит 3442, то болтливый страж сундука скажет 1). Докажите, что существует число k такое, что для любого натурального числа $n \geq k$, Али-Баба может найти магический код, сделав не более $4n - 2023$ проверок.

6. Даны натуральные числа a и b такие, что $\text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b)$ кратно $a+1$. Если $b \leq a$, докажите, что b — квадрат натурального числа.

7. На плоскости дано n точек таких, что среди любых семи из них, какие-то четыре лежат на одной прямой. Докажите, что либо все эти точки лежат на двух прямых, либо все точки, кроме трёх точек общего положения, лежат на одной прямой.

8. Произведение положительных чисел a, b, c равно $\frac{1}{8}$. Докажите неравенство:

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq \frac{15}{16}$$