XVIII Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 19–25.09.2023

Юниор-лига. 3 тур. 23.09.2023

1. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $\angle A = 60^o$, $\angle B = 100^o$, $\angle C = 140^o$. Докажите, что его можно поместить в круг радиусом $\frac{2}{3}AD$.

2. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки D, E и F — основания высот из вершин A, B и C соответственно. Прямая EF и описанная окружность ABC пересекаются в точке P такой, что F находится между E и P. Прямые BP и DF пересекаются в точке Q. Докажите, что если $ED = EP$, то CQ и DP параллельны.

3. Для положительных a, b и c, удовлетворяющих условию $abc = \dfrac{2}{3}$, докажите неравенство:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}.$$

4. В компании из n человек среди любых пяти найдутся трое попарно незнакомых. Какое максимальное количество знакомств может быть в этой компании? (Ответ дать в зависимости от n).

5. Дано натуральное число n. Вначале имеется n куч камешков, в каждой из которых изначально находится по одному камешку. Разрешается взять поровну камешков из любых двух куч и сформировать из них новую кучу. Для каждого n найдите наименьшее количество куч, которое может получиться после нескольких таких операций.

6. Никита записал по кругу 100 натуральных чисел (не обязательно различных). Костя записал по кругу эти же числа, но в другом порядке. Могло ли так оказаться, что у Никиты разность любых двух соседних чисел одна и та же, а у Кости все разности соседних чисел различны? (При нахождении разности двух чисел всегда из большего числа вычитаем меньшее.)

7. Найдите все натуральные n, представимые в виде

$$n = \frac{4ab}{a-b}$$

с натуральными a и b.

8. Докажите, что существует бесконечно много пар целых взаимно простых чисел (a,b) (не обязательно положительных) таких, что уравнения

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + 2ax + b = 0$$

имеют целые корни.