

1. Пусть P и Q — изогонально сопряженные точки в треугольнике ABC , а O_a, O_b, O_c — центры окружностей $(APQ), (BPQ), (CPQ)$. Докажите, что прямые AO_a, BO_b, CO_c пересекаются в одной точке.
2. Рассмотрим все 100-значные (в десятичной системе, ведущие нули разрешены) числа. Их требуется разбить на 10 множеств так, чтобы любые два числа из одного множества имели одинаковую цифру в каком-то из разрядов. Сколько есть таких разбиений?
3. Связный граф на n вершинах таков, что при выкидывании любых двух ребер, имеющих общий конец, связность графа нарушается. Найдите максимальное число ребер в этом графе.
4. Найдите все тройки (a, b, c) натуральных чисел такие, что $\frac{a}{2a} = \frac{b}{2b} + \frac{c}{2c}$.
5. Назовем последовательность целых чисел *хорошей*, если каждое целое число появляется в ней ровно один раз. Найдите все непостоянные многочлены с целыми коэффициентами $P(x)$, такие, что для любой хорошей последовательности $\{a_i\}$ существуют натуральные числа k и $i < j$ такие, что $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j = P(k)$.
6. Сумма n вещественных чисел равна 0. Каждые два из этих чисел, которые отличаются хотя бы на 1, перемножили. Докажите, что сумма получившихся произведений (если они есть) отрицательна.
7. Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность Ω . Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC , BL — биссектриса этого же треугольника. На окружности (AIC) взята произвольная точка P . Окружность (BPD) пересекает биссектрису угла ADC в точке $Q \neq D$. Докажите, что углы $\angle APL$ и $\angle QPC$ равны или в сумме дают 180 градусов.
8. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{a+c}} + \sqrt[3]{\frac{c^2}{a+b}} \geq \frac{3(a+b+c)}{a+b+c+1}.$$

9. Пусть $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ — десятичная запись положительного рационального числа a . Для каких a выполнено условие: для любого натурального n из последовательности цифр $a_1 a_2 a_3 \dots$ можно вырезать (как подслово) натуральное число, делящееся на 2^n ?
10. Для n различных точек плоскости на доске выписали все расстояния между парами этих точек, а на листке выписали числа $\lfloor \log_2 d \rfloor$, для всех чисел d , выписанных на доске. Докажите, что числа на листке принимают менее $2n$ различных значений.