XVIII Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 19–25.09.2023

Юниор-лига. Финал. 25.09.2023

1. Дан треугольник ABC, в нем проведены биссектрисы BB_1 и CC_1, на отрезках BC_1 и CB_1 построены окружности как на диаметрах, внутренние касательные к ним пересекаются в точке P, пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, W_A — середина дуги BAC. Доказать, что точки P, I, W_A лежат на одной прямой.

2. Последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям:

$$a_1 = 1, \quad a_n = 2 + \sqrt{a_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}}.$$

Найдите сумму $a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 + \dots + 2^{2022}a_{2023}$.

3. На плоскости в красный цвет окрашено $8n^3$ узлов решётки. В каждой красной точке P написано общее количество красных точек на вертикальной и горизонтальной прямых, проходящих через P. Докажите, что существует число, которое записывается не менее $n+1$ раз.

4. Даны натуральные числа n и m. Множество S натуральных чисел называется (n, m)-*хорошим*, если:
(1) $m \in S$;
(2) для всех $a \in S$ все делители a также находятся в S;
(3) для всех различных $a, b \in S$, $a^n + b^n \in S$.
Для каких (n, m) единственным(n, m)-*хорошим* множеством является $\mathbb{N}$?

5. Докажите, что можно так разбить граф на два подграфа, что сумма максимальных степеней первого и второго подграфа не превышает максимальной степени исходного графа.

6. C_1, A_1, B_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AB, BC и AC соответственно. C_2, A_2, B_2 — точки касания соответствующих вневписанных окружностей с этими же сторонами. Вторую точку пересечения окружностей (BA_1C_1) и (BA_2C_2) обозначим через T_B. Аналогично определяются точки T_A и T_C. Докажите, что T_A, T_B и T_C лежат на одной прямой.

7. Дано натуральное n. В племени Тумба-Юмба из $n(n+1)$ человек проводят выборы вождя. Баллотируются действующий вождь и n других кандидатов. У каждого члена племени есть список предпочтений. Ровно у n из них действующий вождь занимает в этом списке первое место, ещё у n — второе место, …, ещё у n — последнее место. Действующий вождь, разузнавший все эти списки, решил снять с выборов нескольких (не всех) конкурентов. Обязательно ли ему удастся таким путём занять первое место на выборах (т.е. набрать голосов строго больше, чем любой из остальных кандидатов)? (Каждый человек на выборах голосует за наиболее высокого в своем списке предпочтений из неснятых с выборов кандидатов.)

8. Известно, что сумма дробей $\frac{m^m-1}{n-1}$ и $\frac{n^n-1}{m-1}$, где m и n — натуральные числа, большие 1, — целое число. Докажите, что каждая из дробей — целое число.