

Первый тур. Гранд-лига. 23.09.2024.

1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Различные окружности ω_a , ω_b , ω_c и ω_d вписаны в углы $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ и $\angle CDA$ соответственно и лежат внутри четырехугольника $ABCD$. При этом известно, что окружности ω_a и ω_b касаются; окружности ω_c и ω_d касаются; радикальная ось окружностей ω_a и ω_d совпадает с радикальной осью окружностей ω_b и ω_c . Докажите, что $ABCD$ — трапеция (или параллелограмм).
(П. Кожевников)
2. Для положительных чисел a, b, c верно, что из отрезков длиной a^{2024} , b^{2024} , c^{2024} можно составить треугольник. Докажите, что можно уменьшить одно из чисел a, b, c в 2024 раза и получить числа a', b', c' так, что из отрезков с длинами a', b', c' можно составить треугольник.
(Л. Шатунов)
3. В пространстве находятся 10 радиоуправляемых мух (мухи считаются разными) в 10 точках общего положения (т.е. никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости). Запрещается ситуация, когда некоторые 5 мух оказываются в одной плоскости и когда 3 мухи находятся на одной прямой. В каждый момент времени, когда некоторые 4 мухи оказываются в одной плоскости надо заплатить 1 рубль (за каждую четверку — по рублю, если таких четверок несколько). Верно ли, что имея 200 рублей, можно наверняка прийти к любому заданному общему положению мух?
(П. Кожевников)
4. В стране есть несколько городов, некоторые из них соединены дорогами. На некоторых дорогах установлено одностороннее движение. Утром несколько машин выехали из некоторых городов в другие, а вечером вернулись обратно (возможно, по другому маршруту). Инспектор посчитал, сколько машин проехало по каждой дороге в ту и в другую сторону, и на тех дорогах, на которых эти числа различались, ввёл одностороннее движение в ту сторону, в которую проехало больше машин. Докажите, что если водители захотят проехать из того же пункта отправления в тот же пункт назначения и обратно, они смогут это сделать.
(М. Дидин)
5. Пусть p — нечетное простое число, а a, b, c — целые числа такие, что числа $a^{2023} + b^{2023}$, $b^{2024} + c^{2024}$, $a^{2025} + c^{2025}$ делятся на p . Докажите, что a, b, c делятся на p .
6. Петя написал на 2024 карточках по числу и перевернул карточки. Вася может указать на любые 3 карточки, а Петя назовёт сумму чисел на каких-то двух из них (Вася не знает, на каких именно). Как Васе после нескольких ходов назвать число, написанное на одной из карточек (не обязательно, указывать, на какой именно)?
(М. Дидин)
7. Докажите, что при каждом натуральном n среди первых n натуральных чисел, кратных 3, чисел, в двоичной записи которых чётное число единиц, больше, чем чисел, в двоичной записи которых нечётное число единиц.
8. Дано натуральное число n . Какую минимальную степень может иметь многочлен с вещественными коэффициентами $f(x, y)$ такой, что он обращается в ноль в точности в n точках, являющихся вершинами правильного n -угольника?
9. После длительной войны Великий Змей и Соколиный Глаз решили раскурить трубку мира и сыграть в следующую игру: на доске 2024×2024 две противоположные угловые клетки покрашены в красный и синий цвета, вожди по очереди окрашивают бесцветные клетки, при этом Великий Змей всегда красит клетки в синий цвет, а Соколиный Глаз — в красный. Побеждает тот вождь, после хода которого соперник не сможет покрасить очередную клетку. Однако дым из трубки мира заполнил доску. Великий Змей стал видеть лишь клетки своего цвета и клетки, граничащие с ними по стороне, а Соколиный Глаз — лишь клетки своего цвета и граничащие с ними хотя бы по одной точке. Вождь никогда не станет красить клетку в свой цвет, если не уверен в том, что она не покрашена. Оба вождя знают все правила выше. Первым ходит Великий Змей. Кто выигрывает при правильной игре?
(Л.Шатунов, М.Дидин)

10. В треугольнике ABC точки P и Q изогонально сопряжены. Прямая AP пересекает окружность (BPC) повторно в точке P_A , прямая AQ пересекает (BQC) повторно в Q_A . Аналогично определим P_B, Q_B и P_C, Q_C . Докажите, что окружности $(PP_AQ_A), (PP_BQ_B), (PP_CQ_C)$ имеют общую радикальную ось.

(В. Коньшев)