XIX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Командная олимпиада. Старшие. 22.09.2024.

1. Петя и Вася по очереди (начинает Петя) выписывают на доску натуральные числа, не превосходящие 2024. Выписывать по второму разу число, которое уже есть на доске, нельзя. Игрок, после хода которого произведение всех чисел, выписанных на доске, оказывается кратно 2024, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

2. Квадратные уравнения $x^2 - (a+b)cx - b^2c^2 = 0$ и $x^2 + (a+b)cx - a^2c^2 = 0$ имеют общий вещественный корень. Найдите все возможные значения выражения $(a^2 - b^2)c^2$.

3. Выясните, для каких натуральных чисел m можно так подобрать натуральное l, что сумма

   $$n + n^2 + n^3 + \ldots + n^l$$

   будет делиться на m при любом натуральном n.

   (А. Скабелин, задачник «Кванта»)

4. Трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$) вписана в окружность Ω. Рассмотрим всевозможные окружности Γ, которые касаются отрезка CD и той дуги CD окружности Ω, что не содержит точек A и B. Прямая, проходящая через A, касается Γ в точке K. а прямая, проходящая через B, касается Γ в точке L. Докажите, что сумма $AK + BL$ постоянна (то есть не зависит от выбора окружности Γ).

   (П. Кожевников)

5. В последовательности $\{a_n\}$ все натуральные числа встречаются ровно по одному разу. Докажите, что для некоторого натурального k выполняется неравенство

   $$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{i^2} > 2024.$$

6. Вася замостил неперекрывающимися доминошками все клетки доски 101×101, кроме одной. Он может двигать доминошки: если в вертикальном или горизонтальном ряду из трёх последовательных клеток первые две заняты одной доминошкой, а третья свободна, можно подвинуть доминошку на одну клетку (так, чтобы после этого она заняла вторую и третью клетки). Вася обнаружил, что из его расположения доминошек последовательностями таких сдвигов можно получить N разных расположений (включая исходное). При каком наибольшем N такое может быть?

7. Дан треугольник ABC, пусть Q — проекция ортоцентра на медиану треугольника ABC, выходящую через A. На отрезке BC выбрана произвольная точка T. Прямая AT пересекает окружности (QAB) и (QAC) повторно в точках B', C' соответственно. Прямые BB' и CC' пересекаются в точке K. На прямой AK выбрана точка L, отличная от A, так что $TA = TL$. Докажите, что прямая TL касается окружности $(QB'C')$.

   (В. Конышев)

8. Пусть p — простое число. Обозначим через $\mathbb{F}_p[x]$ множество всех многочленов от переменной x, чьи коэффициенты есть остатки при делении на p. Все арифметические операции с такими многочленами выполняются по модулю p.

   Множество многочленов из $\mathbb{F}_p[x]$ называется *безумным*, если вместе с любыми двумя многочленами $f(x)$ и $g(x)$ (не обязательно различными) в нём содержится и остаток от деления многочлена $f(g(x))$ на $x^p - x$. Найдите размер наименьшего безумного множества, содержащего многочлены $x + 1$ и $x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + x^k + \ldots + x^3 + x^2 + 2x + 1$.