

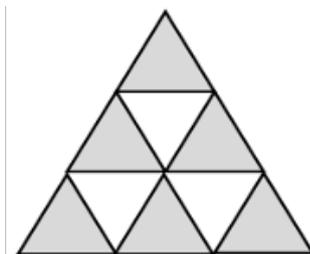
1. Какое наименьшее целое число недель длится ровно $N!$ секунд при каком-то натуральном N ?

2. При каких натуральных $n \geq 3$, среди чисел $n, (n + 1), \dots, n^2$ можно выбрать четыре попарно различных числа a, b, c, d так, чтобы выполнялось равенство $a \cdot b = c \cdot d$.

3. У Васи и Пети есть по клетчатой доске $N \times N$, на досках отмечены вершины всех клеток. Каждый на своей доске проводит как можно больше непересекающихся отрезков (даже по вершине), концы которых лежат в отмеченных точках: Петя проводит отрезки длины 4, а Вася — отрезки длины 5. При каком наименьшем N Вася сможет провести больше отрезков, чем Петя?

4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно. Прямая PQ пересекает продолжение стороны AC в точке R . Докажите, что $BQ = AR$.

5. Равносторонний треугольник разделен на 9 равных треугольников, как показано на рисунке. Эти треугольники покрашены в шахматном порядке — 6 серых и 3 белых. В узлах полученной треугольной сетки расставлены натуральные числа (всего 10 чисел) таким образом, что в вершинах любого серого треугольника, а также исходного треугольника сумма чисел делится на 3, а в любом белом — нет. Может ли сумма чисел во всех узлах равняться 2024?



6. Петя и Вася, знающие только цифры 1, 2 и 3, играют в игру. Петя первым ходом пишет на доске одну цифру, а каждым следующим ходом приписывает цифру справа к числу на доске. Вася своим ходом может убрать или добавить в любом месте числа блок, состоящий из двух одинаковых чисел, написанных подряд (например, 122122). Может ли Петя добиться того, чтобы на доске образовалось не менее чем 2024-значное число?

7. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектриса угла BAC пересекает продолжение стороны DC в точке P , а биссектриса угла DAC пересекает продолжение стороны BC в точке Q . Докажите, что перпендикуляр из точки A к прямой PQ является биссектрисой угла BAD .

8. В деревне некоторые пары домов соединены непересекающимися тропинками. От каждого дома отходят 3 тропинки, причём можно добраться от каждого дома до каждого. Нет ни трёх, ни четырёх домов, соединённых тропинками по кругу. Какое наибольшее количество домов может быть в деревне? (От любого домика по тропинкам можно дойти до любого другого.)