

Командная олимпиада. Юниоры. 22.09.2024.

1. Квадратные уравнения $x^2 - (a + b)cx - b^2c^2 = 0$ и $x^2 + (a + b)cx - a^2c^2 = 0$ имеют общий вещественный корень. Найдите все возможные значения выражения $(a^2 - b^2)c^2$.
2. Внутри треугольника ABC выбрана точка X . Точки P , Q и R — вторые точки пересечения прямых XA , XB и XC с описанной окружностью треугольника ABC . Пусть U — точка на отрезке XP . Прямая, проходящая через U параллельно AB , пересекает отрезок BQ в точке V . Прямая, проходящая через U параллельно AC , пересекает отрезок CR в точке S . Докажите, что точки Q , R , V и S лежат на одной окружности.
3. Выясните, для каких натуральных чисел m можно подобрать натуральное l , что сумма

$$n + n^2 + n^3 + \dots + n^l$$

будет делиться на m при любом натуральном n .

4. Каждая сторона равностороннего треугольника разделена на 7 равных частей и через каждую точку деления проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. В итоге треугольник разбился на 49 маленьких треугольничков, образующих треугольную сетку. Они покрашены в шахматном порядке — 28 чёрных и 21 белый. В узлах сетки расставлены натуральные числа таким образом, что в любом чёрном треугольничке сумма чисел в вершинах делится на 3, а в любом белом — нет. Может ли сумма чисел во всех граничных узлах равняться 2024?
5. Существует ли треугольник, у которого все стороны и диаметр вписанной окружности являются целыми нечётными числами?
6. Внутри треугольника ABC даны его ортоцентр H , инцентр I и центр описанной окружности O . Докажите, что если описанная окружность треугольника OIH проходит через одну из вершин треугольника ABC , то один из углов треугольника ABC равен 60° .
7. Петя и Вася играют в игру. Петя первым ходом пишет на доске цифру 1, 2 или 3, а каждым следующим ходом приписывает одну из этих цифр справа к числу на доске. Вася своим ходом может убрать или добавить в любом месте числа блок вида aa или $abab$, где a и b цифры из множества $\{1, 2, 3\}$ (возможно одинаковые). Может ли Петя добиться того, чтобы на доске образовалось не менее чем 2024-значное число?
8. В деревне некоторые пары домов соединены непересекающимися тропинками. От каждого дома отходят три тропинки. Нет ни трёх, ни четырёх домов, соединённых тропинками по кругу. Какое наибольшее количество домов может быть в деревне?